Total number of printed pages–11

1 (Sem–4/FYUGP) MAT 41 MN/(B)

2026



MATHEMATICS

(Minor)

SET–B

Paper : MAT4400504MN

(Number Theory–I)

Full Marks : 60

Time : 2½ hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

SET–B

*Answer **either** in English **or** in Assamese.*

1. Answer the following questions : 1×8=8

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

(i) Show that Diophantine equation $2x+4y=5$ has no solution.

দেখুওৱা যে ডাইওফেণ্টাইন সমীকৰণ $2x+4y=5$-ৰ কোনো সমাধান নাই।

(ii) For any integer $a \neq 0$, prove that $a \mid 0$.

যিকোনো অশূন্য অখণ্ড সংখ্যাৰ বাবে প্ৰমাণ কৰা যে $a \mid 0$.

(iii) If the positive integers a and b are relatively prime than $gcd(a, b) =$ _____. *(Fill in the blank)*

যদি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা a আৰু b পৰস্পৰ মৌলিক হয় তেন্তে $gcd(a, b) =$ _____।

(খালী ঠাই পূৰ কৰা)

(iv) Give example of integers a and b such that $a^2 \equiv b^2 \pmod 3$ but $a \not\equiv b \pmod 3$.

অখণ্ড সংখ্যা a আৰু b-ৰ উদাহৰণ দিয়া য'ত $a^2 \equiv b^2 \pmod 3$ কিন্তু $a \not\equiv b \pmod 3$।

(v) State Fermat's Theorem.

ফার্মাৰ উপপাদ্যটো লিখা।

(vi) Find the value of $\phi(180)$.

$\phi(180)$-ৰ মান উলিওৱা।

(vii) Define τ-function.

τ-ফলনৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(viii) How many solutions does the linear congruence $ax \equiv b \pmod n$ have when $gcd(a, n)=1$?

ৰৈখিক অনুৰূপতা $ax \equiv b \pmod n$-ৰ কিমানটা সমাধান থাকিব যেতিয়া $gcd(a, n)=1$ হয়?

2. Answer ***any six*** of the following questions : 2×6=12

তলৰ *যিকোনো ছয়টা* প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰা ঃ

(i) Show that square of any integer is either of the form $4k$ or $4k+1$.

National Pholidan College Library * Nagaon : Assam * Acc. No. Date

দেখুওৱা যে যিকোনো অখণ্ড সংখ্যাৰ বৰ্গ $4k$ বা $4k+1$ আকাৰত থাকিব।

(ii) If $a \mid bc$ and $gcd(a, b) = 1$, then show that $a \mid c$.

যদি $a \mid bc$ আৰু $gcd(a, b) = 1$, তেন্তে দেখুওৱা যে $a \mid c$।

(iii) Give examples of integers a, b, c such that $a \mid bc$ but $a \nmid b$ and $a \nmid c$.

অখণ্ড সংখ্যা a, b, c-ৰ উদাহৰণ দিয়া যাতে $a \mid bc$ কিন্তু $a \nmid b$ আৰু $a \nmid c$।

(iv) What is the remainder when 7^{30} is divided by 4?

7^{30} ক 4 ৰে হৰণ কৰিলে ভাগশেষ কি হ'ব?

(v) If $a \equiv b \pmod{n}$ and $m \mid n$, then prove that $a \equiv b \pmod{m}$.

যদি $a \equiv b \pmod{n}$ আৰু $m \mid n$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $a \equiv b \pmod{m}$।

Dhekiajuli Phookan College Library Acc. No. Date Nagaon: Assam

(vi) Find the digit of the unit place of 3^{100}.

3^{100}-ৰ এককৰ স্থানৰ অংকটো উলিওৱা।

(vii) For arbitrary integers a, b, c if $a \equiv b \pmod{n}$, then prove that $a + c \equiv b + c \pmod{n}$.

যিকোনো অখণ্ড সংখ্যা a, b, c-ৰ বাবে যদি $a \equiv b \pmod{n}$ তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $a + c \equiv b + c \pmod{n}$।

(viii) For odd integer n, show that $\phi(2n) = \phi(n)$.

অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা n-ৰ বাবে দেখুওৱা যে $\phi(2n) = \phi(n)$।

(ix) Find the number of positive divisors of 7056.

7056-ৰ ধনাত্মক বিভাজকৰ সংখ্যা উলিওৱা।

(x) Prove that equation $\phi(n) = \phi(n+2)$ is satisfied by $n = 2(2p-1)$ whenever p and $2p-1$ are both odd primes.

প্রমাণ কৰা যে $n = 2(2p-1)$-ৰ দ্বাৰা $\phi(n) = \phi(n+2)$ সমীকৰণটো সিদ্ধ হয় য'ত p আৰু $2p-1$ দুয়োটা অযুগ্ম মৌলিক সংখ্যা।

3. Answer ***any four*** of the following questions : 5×4=20

তলৰ *যিকোনো চাৰিটা* প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰা ঃ

(i) For $n \geq 1$, prove that $n(n+1)(2n+1)/6$ is an integer.

সকলো অখণ্ড সংখ্যা $n \geq 1$-ৰ বাবে প্ৰমাণ কৰা যে $n(n+1)(2n+1)/6$ এটা অখণ্ড সংখ্যা।

(ii) Use the Euclidean Algorithm to obtain integers x and y satisfying $gcd(1769, 2378) = 1769x + 2378y$

ইউক্লিডিয়ান কলনবিধি প্ৰয়োগ কৰি অখণ্ড সংখ্যা x আৰু y উলিওৱা য'ত $gcd(1769, 2378) = 1769x + 2378y$।

(iii) Prove that there is an infinite number of primes.

প্ৰমাণ কৰা যে মৌলিক সংখ্যাৰ সংখ্যাটো অসীম।

Dhurkia Bhoirab College Library Acc. No. Date Assam

(iv) Determine all solutions in the integers of the Diophantine equation $56x + 72y = 40$.

$56x + 72y = 40$ ডাইওফেন্টাইন সমীকৰণটোৰ সকলো অখণ্ড সংখ্যাৰ সমাধান উলিওৱা।

(v) If $ca \equiv cb \pmod{n}$, prove that $a \equiv b \left(mod \frac{n}{d}\right)$ where $d = gcd(c, n)$.

যদি $ca \equiv cb \pmod{n}$ হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $a \equiv b \left(mod \frac{n}{d}\right)$ য'ত $d = gcd(c, n)$।

(vi) If p is prime and $gcd(a, p) = 1$, then prove that $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

যদি p এটা মৌলিক সংখ্যা আৰু $gcd(a, p) = 1$ হয় তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$।

(vii) Define Euler's phi function. If p is a prime and $k > 0$ then prove that $\phi(p^k) = p^k\left(1 - \frac{1}{p}\right)$.

অইলাৰৰ ফাই ফলনৰ সংজ্ঞা দিয়া। যদি p এটা মৌলিক সংখ্যা আৰু $k>0$ হয় তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $\phi(p^k)=p^k\left(1-\frac{1}{p}\right)$।

(viii) If f is a multiplicative function and $F(n)=\sum_{d|n} f(d)$.

Then show that F is also multiplicative.

যদি f এটা গুণকীয় ফলন আৰু

$$F(n)=\sum_{d|n} f(d)$$

তেন্তে দেখুওৱা যে Fও এটা গুণকীয় ফলন।

4. Answer ***any two*** of the following questions : 10×2=20

তলৰ *যিকোনো দুটা* প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰা ঃ

(i) State and prove Division Algorithm. 2+8=10

বিভাজন কলনবিধিটো লিখা আৰু প্ৰমাণ কৰা।

(ii) *(a)* Prove that every integer $n\geq 2$ has a prime factor. 5

প্ৰমাণ কৰা যে যিকোনো অখণ্ড সংখ্যা $n\geq 2$-ৰ এটা মৌলিক উৎপাদক আছে।

(b) Establish the following formula by Mathematical induction

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$$

for all $n\geq 1$. 5

সকলো $n\geq 1$-ৰ বাবে গণিতীয় আৱোহ-তত্ত্বৰ সহায়ত তলৰ সূত্ৰটো প্ৰতিষ্ঠা কৰা।

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$$

(iii) *(a)* Prove that a positive integer n is divisible by 3 if 3 divides the sum of the digits of n. 5

প্ৰমাণ কৰা যে এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা n, 3ৰে বিভাজ্য হ'ব যদিহে n সংখ্যাটোৰ অংকবোৰৰ যোগফল 3ৰে বিভাজ্য হয়।

Anundoram Phookan College Library * Nagaon : Assam *

(b) If $a \equiv b \pmod{n}$, then prove that $a^k \equiv b^k \pmod{n}$ for any positive integer k. 5

যদি $a \equiv b \pmod{n}$ হয় তেন্তে যিকোনো ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা k-ৰ বাবে প্রমাণ কৰা যে $a^k \equiv b^k \pmod{n}$ ।

(iv) (a) If $3 \mid n$ then show that $\phi(3n) = 3\phi(n)$. 5

যদি $3 \mid n$ হয় তেন্তে দেখুওৱা যে $\phi(3n) = 3\phi(n)$ ।

(b) If $gcd(9, 35) = 1$, show that $a^{12} \equiv 1 \pmod{35}$. 5

যদি $gcd(9, 35) = 1$, দেখুওৱা যে $a^{12} \equiv 1 \pmod{35}$ ।

(v) (a) For any positive integer n, prove that

$$\phi(n) = n \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}$$ 5

যিকোনো ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা n-ৰ বাবে প্রমাণ কৰা যে $\phi(n) = n \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}$ ।

(b) Using Chinese Remainder Theorem solve the following linear congruences

$$x \equiv 1 \pmod{3}$$
$$x \equiv 2 \pmod{5}$$
$$x \equiv 3 \pmod{7}$$ 5

চাইনীজ ৰিমাইণ্ডাৰ উপপাদ্য ব্যৱহাৰ কৰি তলৰ ৰৈখিক অনুৰূপতা কেইটা সমাধান কৰা

$$x \equiv 1 \pmod{3}$$
$$x \equiv 2 \pmod{5}$$
$$x \equiv 3 \pmod{7}$$

College Library No. Date Nagaon Assam