*Total number of printed pages–11*

**1 (Sem–4/FYUGP) MAT 41 MN/(A)**

**2026**

# MATHEMATICS

( Minor )

**SET–A**

Anandaram Dhekial Phookan College Library
Acc. No.
Date
Nagaon : Assam

Paper : MAT4400504MN

**( Number Theory–I )**

*Full Marks : 60*

Time : 2½ hours

*The figures in the margin indicate full marks for the questions.*

**SET–A**

*Answer **either** in English **or** in Assamese.*

1. Answer the following questions : 1×8=8

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

*(i)* For integer $a$, prove that $1 \mid a$.

অখণ্ড সংখ্যা $a$-ৰ বাবে প্ৰমাণ কৰা যে $1 \mid a$।

*(ii)* If $a$ and $b$ are two positive integers such that $gcd(a, b) = 1$, then $lcm(a, b) =$ _____. *(Fill in the blank)*

যদি $a$ আৰু $b$ দুটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা য'ত $gcd(a, b) = 1$ তেন্তে $lcm(a, b) =$ _____।

*(খালী ঠাই পূৰ কৰা)*

*(iii)* Show that the Diophantine equation $3x + 6y = 5$ has no solution.

দেখুওৱা যে ডাইওফেণ্টাইন সমীকৰণ $3x + 6y = 5$-ৰ কোনো সমাধান নাই।



*(iv)* State Wilson's Theorem.

উইলচনৰ উপপাদ্যটো লিখা।

*(v)* Find the value of $\sigma(180)$.

$\sigma(180)$-ৰ মান উলিওৱা।

*(vi)* Write Euclid's lemma.

ইউক্লিডৰ প্ৰমেয়িকাটো লিখা।

*(vii)* Find the value of $\mu(30)$.

$\mu(30)$-ৰ মান উলিওৱা।

*(viii)* What does $a \equiv b \pmod{n}$ mean?

$a \equiv b \pmod{n}$ এ কি বুজায়?

2. Answer ***any six*** of the following questions : 2×6=12

তলৰ *যিকোনো ছয়টা* প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰা ঃ

*(i)* Prove that square of any odd integer is of the form $8k + 1$.



Dhekial Phookan College Library * Nagaon: Assam *

প্রমাণ কৰা যে যিকোনো অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যাৰ বৰ্গ $8k+1$ আকাৰত থাকে।

*(ii)* If $gcd(a, b)=1$ and $c \mid a$ then prove that $gcd(b, c)=1$.

যদি $gcd(a, b)=1$ আৰু $c \mid a$ তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $gcd(b, c)=1$।

*(iii)* Using Euclidean Algorithm find $gcd\ (272, 1479)$.

ইউক্লিডিয়ানৰ কলনবিধি প্ৰয়োগ কৰি $gcd\ (272, 1479)$ উলিওৱা।

*(iv)* Give examples of integers $a, b, c$ such that $a \mid (b+c)$ but $a \nmid b$ and $a \nmid c$.

অখণ্ড সংখ্যা $a, b, c$-ৰ উদাহৰণ দিয়া যাতে $a \mid (b+c)$ কিন্তু $a \nmid b$ আৰু $a \nmid c$।

*(v)* Find the remainder when $2^{50}$ is divided by 7.

$2^{50}$ ক 7 ৰে হৰণ কৰিলে ভাগশেষ কিমান হ'ব উলিওৱা।



*(vi)* For arbitrary integers $a, b, c$ if $a \equiv b\ (mod\ n)$ and $b \equiv c\ (mod\ n)$ then prove that $a \equiv c\ (mod\ n)$.

যিকোনো অখণ্ড সংখ্যা $a, b, c$-ৰ বাবে যদি $a \equiv b\ (mod\ n)$ আৰু $b \equiv c\ (mod\ n)$ তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $a \equiv c\ (mod\ n)$।

*(vii)* Show that $5^{10}-3^{10}$ is divisible by 11.

দেখুওৱা যে $5^{10}-3^{10}$, 11 ৰে বিভাজ্য হয়।

*(viii)* If $3 \nmid n$ then prove that $\phi(3n)=2\phi(n)$.

যদি $3 \nmid n$ হয় তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $\phi(3n)=2\phi(n)$।

*(ix)* For $n=14$, show that $\sigma(n)=\sigma(n+1)$.

$n=14$-ৰ বাবে দেখুওৱা যে $\sigma(n)=\sigma(n+1)$।

*(x)* If $\tau(n)$ is odd integer then prove that $n$ is a perfect square.

যদি $\tau(n)$ অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা হয় তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $n$ এটা পূৰ্ণ বৰ্গ সংখ্যা।

Nanda Dhar Phookan College Library * Nagaon : Assam *
Acc. No.
Date

3. Answer ***any four*** of the following questions : 5×4=20

তলৰ *যিকোনো চাৰিটা* প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰা ঃ

*(i)* State and prove Archimedean property. 14=5

আৰ্কিমিডিয়ান গুণধৰ্মটো লিখা আৰু প্ৰমাণ কৰা।

*(ii)* For all integer $a \geq 1$ prove that $a\left(a^2+2\right)/3$ is an integer.

সকলো অখণ্ড সংখ্যা $a \geq 1$-ৰ বাবে প্ৰমাণ কৰা যে $a\left(a^2+2\right)/3$ এটা অখণ্ড সংখ্যা।

*(iii)* Determine all solutions in the positive integers of the Diophantine equation $54x+21y=906$.

$54x+21y=906$ ডাইওফেণ্টাইন সমীকৰণটোৰ সকলো ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যাৰ সমাধান উলিওৱা।

*(iv)* If $P$ is a prime, then show that $a^P \equiv a(mod\ P)$ for any integer $a$.

যদি $P$ এটা মৌলিক সংখ্যা হয় তেন্তে যিকোনো অখণ্ড সংখ্যা $a$-ৰ বাবে দেখুওৱা যে $a^P \equiv a(mod\ P)$।



*(v)* Let $a, b \in Z$. Prove that if $gcd(a, b)=1$, then $gcd(a+b, a-b)=1$ or 2.

ধৰা হ'ল $a, b \in Z$। যদি $gcd(a, b)=1$ হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $gcd(a+b, a-b)=1$ বা 2।

*(vi)* Prove that a positive integer $n$ is divisible by 4 if the number formed by its ten and unit digits is divisible by 4.

প্ৰমাণ কৰা যে এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা $n$, 4 ৰে বিভাজ্য হ'ব যদিহে সংখ্যাটোৰ দহক আৰু এককৰ স্থানৰ অংকৰে গঠিত সংখ্যাটো 4ৰে বিভাজ্য হয়।

*(vii)* Define multiplicative function. Show that the function $\tau$ is multiplicative.

গুণকীয় ফলনৰ সংজ্ঞা দিয়া। দেখুওৱা যে $\tau$ ফলনটো গুণকীয়।

*(viii)* If $n = p_1^{k_1}\ p_2^{k_2} \ldots .\ p_r^{k_r}$ is the prime factorization of $n>1$, then prove that

$$\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots.\left(1-\frac{1}{p_r}\right)$$

যদি $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} .... p_r^{k_r}$, $n > 1$-ৰ মৌলিক উৎপাদক বিশ্লেষণ হয় তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)....\left(1-\frac{1}{p_r}\right)$$

4. Answer ***any two*** of the following questions : 10×2=20

তলৰ *যিকোনো দুটা* প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰা ঃ

*(i)* State and prove that fundamental theorem of arithmetic. 2+8=10

পাটীগণিতৰ মৌলিক উপপাদ্যটো লিখা আৰু প্ৰমাণ কৰা।

*(ii)* *(a)* Prove that if $a$ and $b$ are integers with $b > 0$, then there exists unique integers $q$ and $r$ satisfying $a = qb + r$, where $0 \le r < b$. 6

যদি $a$ আৰু $b$ অখণ্ড সংখ্যা আৰু $b > 0$. তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে একমাত্ৰ অখণ্ড সংখ্যা $q$ আৰু $r$ থাকে যাতে $a = qb + r$, য'ত $0 \le r < b$।



Phookan College Library * Nagaon : Assam *

*(b)* Establish the following formula by Mathematical induction : 4

$1+3+5+...+(2n-1) = n^2$ for all $n \ge 1$.

সকলো $n \ge 1$-ৰ বাবে গণিতীয় আৱোহ-তত্ত্বৰ সহায়ত তলৰ সূত্ৰটো প্ৰতিষ্ঠা কৰা

$1+3+5+...+(2n-1) = n^2$

*(iii)* *(a)* Using Chinese Remainder theorem solve the following linear congruences $x \equiv 3 \pmod 4$, $x \equiv 2 \pmod 5$, $x \equiv 6 \pmod 7$ 5

চাইনীজ ৰিমাইণ্ডাৰ উপপাদ্যৰ সহায়ত তলৰ ৰৈখিক অনুৰূপ কেইটা সমাধান কৰা।

$x \equiv 3 \pmod 4$, $x \equiv 2 \pmod 5$, $x \equiv 6 \pmod 7$

*(b)* If $p$ and $q$ are distinct primes, prove that $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \pmod{pq}$. 5

যদি $p$ আৰু $q$ পৃথক মৌলিক সংখ্যা হয়, প্ৰমাণ কৰা যে $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \pmod{pq}$।

(iv) (a) Show that the function $\mu$ is a multiplicative function. 5

দেখুওৱা যে $\mu$ ফলনটো এটা গুণকীয় ফলন।

(b) For each positive integer $n \geq 1$, prove that $\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{if } n = 1 \\ 0, & \text{if } n > 1 \end{cases}$ 5

প্ৰত্যেক ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা $n \geq 1$-ৰ বাবে প্ৰমাণ কৰা যে

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{if } n = 1 \\ 0, & \text{if } n > 1 \end{cases}$$

(v) (a) If $p$ and $q$ are distinct primes with $a^p \equiv a \pmod{q}$ and $a^q \equiv a \pmod{p}$, prove that $a^{pq} \equiv a \pmod{pq}$. 5

যদি $p$ আৰু $q$ পৃথক মৌলিক সংখ্যা আৰু $a^p \equiv a \pmod{q}$ আৰু $a^q \equiv a \pmod{p}$ হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $a^{pq} \equiv a \pmod{pq}$।



(b) Solve $18x \equiv 30 \pmod{42}$. 5

সমাধান কৰা $18x \equiv 30 \pmod{42}$।