*Total number of printed pages–11*

**1 (Sem–4/AR) MAT 2 (A)**

Aliandaram Dhekial Phookan College Library
Acc. No.
Date
Nagaon, Assam

**2026**

# MATHEMATICS

( Major/Minor–I )

Paper : MAT0400204

**( Complex Analysis–I )**

*Full Marks : 45*

Time : 2 hours

*The figures in the margin indicate full marks for the questions.*

*Answer* ***either*** *in English* ***or*** *in Assamese.*

1. Answer the following as directed : 1×5=5

নির্দেশনা মতে তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

*(i)* Sketch the set $Im\,z > 1$.

$Im\,z > 1$ সংহতিটো অংকন কৰা।

*(ii)* Describe the domain of the function $\frac{1}{z^2+1}$.

$\frac{1}{z^2+1}$ ফলনৰ আদিক্ষেত্ৰ লিখা।

*(iii)* Write the function $f(z) = z^3 + z + 1$ in the form $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$.

$f(z) = z^3 + z + 1$ ফলনটো

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ আকাৰত লিখা।

*(iv)* Show that

দেখুওৱা যে

$$\lim_{z\to\infty} \frac{4z^2}{(z-1)^2} = 4.$$

*(v)* Define entire functions.

সকলো ঠাইতে বিশ্লেষণাত্মক (Entire) ফলন সংজ্ঞায়িত কৰা।



2. Answer ***any five*** of the following questions : 2×5=10

তলৰ *যিকোনো পাঁচটা* প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

*(i)* What do you mean by the accumulation point of a set ? Determine the accumulation point of the set $z_n = i^n (n = 1,2,..)$.

এটা সংহতিৰ সীমাবিন্দু বুলিলে কি বুজায় ?

$z_n = i^n (n = 1,2,..)$ গোটটোৰ সীমাবিন্দু নিৰ্ণয় কৰা।

*(ii)* Show that if a function $f(z)$ is continuous and non-zero at a point $z_0$ then $f(z) \neq 0$ throughout some neighbourhood of that point.

দেখুওৱা যে যদি $f(z)$ ফলনটো $z_0$ বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন আৰু অশূন্য হয় তেন্তে সেই বিন্দুৰ কোনোবা এটা চুবুৰীত $f(z) \neq 0$ ।

*(iii)* Show that the function $f(z) = z^2$ is entire.

দেখুওৱা যে $f(z) = z^2$ ফলনটো সকলো ঠাইতে বিশ্লেষণাত্মক (Entire) হয়।

(iv) Using Cauchy-Riemann equations determine where $f'(z)$ exists, when $f(z)=1/z$.

Cauchy-Riemann সমীকৰণ ব্যৱহাৰ কৰি $f(z)=1/z$ হলে তা $f'(z)$ কত থাকে সেইটো নির্ণয় কৰা।

(v) Find $z$ such that $e^z = 1+\sqrt{3}i$.

$z$ বিচাৰি উলিওৱা যাতে $e^z = 1+\sqrt{3}i$ হয়।

(vi) Show that the function $f(z)=2z^2-3-ze^z+e^{-z}$ is entire.

দেখুওৱা যে $f(z)=2z^2-3-ze^z+e^{-z}$ ফলনটো সকলো ঠাইতে বিশ্লেষণাত্মক (Entire) হয়।

(vii) Show that $\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$ where $z = x+iy$.

দেখুওৱা যে $\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$ যত $z = x+iy$।

(viii) Evaluate the integral $\int_0^\infty e^{-zt}dt, (Re\, z > 0)$.

$\int_0^\infty e^{-zt}dt, (Re\, z > 0)$ অনুকলটোৰ মান নির্ণয় কৰা।



(ix) Evaluate the contour integral $\int_C \frac{dz}{z}$ where $C$ is the top half of the circle $|z|=1$ from $z=1$ to $z=-1$.

Contour অনুকল $\int_C \frac{dz}{z}$ ৰ মান নির্ণয় কৰা য'ত $C$ হৈছে $z=1$ ৰ পৰা $z=-1$ লৈকে বৃত্ত $|z|=1$ ৰ ওপৰৰ অর্ধেক।

(x) Show that

দেখুওৱা যে

$$\left|\int_C \frac{z+4}{z^3-1}dz\right| \le \frac{6\pi}{7}.$$

3. Answer ***any four*** of the following questions: 5×4=20

তলৰ *যিকোনো চাৰিটা* প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

(i) Suppose that $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ where $z=x+iy$ and $z_0=x_0+iy_0, w_0=u_0+iv_0$. Then prove that $\lim_{z\to z_0} f(z)=w_0$ if $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)=u_0$ and

$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v_0$.

ধৰি লোৱা যে $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ য'ত $z = x + iy$ আৰু $z_0 = x_0 + iy_0, w_0 = u_0 + iv_0$।

প্ৰমাণ কৰা যে $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$ যদি

$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u_0$ আৰু

$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v_0$।

*(ii)* Suppose $f(z) = \overline{z}$. Examine where $\frac{dw}{dz}$ exists.

ধৰি লোৱা যে $f(z) = \overline{z}$। $\frac{dw}{dz}$ কত আছে পৰীক্ষা কৰা।

*(iii)* Suppose that $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ and its conjugate $\overline{f(z)} = u(x,y) - iv(x,y)$ are analytic in a domain $D$. Then show that $f(z)$ must be constant throughout $D$.

ধৰি লোৱা যে $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ আৰু ইয়াৰ সংযুগ্মী $\overline{f(z)} = u(x,y) - iv(x,y)$ domain $D$ত বিশ্লেষণাত্মক হয়। দেখুওৱা যে $f(z), D$ ত ধ্ৰুৱক হয়।



College Library * Nagaon : Assam * Date

*(iv)* Show that if $f'(z) = 0$ everywhere in a domain $D$ then $f(z)$ must be constant throughout $D$.

যদি এটা domain $D$ ৰ সকলোতে $f'(z) = 0$ হয়, দেখুওৱা যে $f(z), D$ ত ধ্ৰুৱক হয়।

*(v)* What do you mean by harmonic functions? Show that if a function $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ is analytic in a domain $D$ then its component functions $u$ and $v$ are harmonic in $D$.

Harmonic ফলন বুলিলে কি বুজায়? দেখুওৱা যে যদি এটা ফলন $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ এটা domain $D$ ত বিশ্লেষণাত্মক হয়, তেন্তে ইয়াৰ উপাদান ফলন $u$ আৰু $v$, $D$ ত harmonic হয়।

*(vi)* Define complex exponential function and show that it is entire.

জটিল exponential ফলনৰ সংজ্ঞা দিয়া আৰু দেখুওৱা যে ই সকলো ঠাইতে বিশ্লেষণাত্মক (Entire) হয়।

*(vii)* Show that

দেখুওৱা যে

$$(1+i)^i = exp\left(-\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right) exp\left(i\frac{\ln 2}{2}\right), n \in \mathbb{Z}.$$

(viii) Let $C$ denote the positively oriented boundary of the square whose sides lie along the lines $x = \pm 2$ and $y = \pm 2$. Applying the Cauchy's integral formula evaluate $\int_C \frac{e^{-z}}{z - \pi i/2} dz$.

ধৰা হওক $C$ য়ে বৰ্গটোৰ ধনাত্মকভাৱে অভিমুখী সীমা বুজাওক যাৰ কাষবোৰ $x = \pm 2$ আৰু $y = \pm 2$ ৰেখাত পৰি আছে। Cauchy's integral সূত্ৰ প্ৰয়োগ কৰি $\int_C \frac{e^{-z}}{z - \pi i/2} dz$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

4. Answer ***any one*** of the following questions: 10×1=10

তলৰ *যিকোনো এটা* প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

(i) Suppose that $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ and that $f'(z)$ exists at a point $z_0 = x_0 + iy_0$. Prove that the first order partial derivatives of $u$ and $v$ must exist at $(x_0, y_0)$ and they must satisfy the Cauchy-Riemann equations there. Also show that $f'(z_0) = u_x + iv_x = v_y - iu_y$ where partial derivatives are to be evaluated at $(x_0, y_0)$.



ধৰি লোৱা যে $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ আৰু $f'(z)$, $z_0 = x_0 + iy_0$ বিন্দুত সংজ্ঞাবদ্ধ হয়। প্ৰমাণ কৰা যে $u$ আৰু $v$ ৰ প্ৰথম ক্ৰমৰ আংশিক অৱকলজ $(x_0, y_0)$ ত থাকিব লাগিব আৰু তাত Cauchy-Riemann সমীকৰণ সন্তুষ্ট কৰিব লাগিব। লগতে দেখুওৱা যে $f'(z_0) = u_x + iv_x = v_y - iu_y$ য'ত আংশিক অৱকলজ সমূহৰ মান $(x_0, y_0)$ ত উলিয়াব লাগে।

(ii) Show that if $w(t): \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $a \le t \le b$ is a continuous function then

$$\left| \int_a^b w(t)dt \right| \le \int_a^b |w(t)| dt .$$

Suppose $C$ is a contour of length $L$ and $f$ is continuous of $C$. If $M$ is non-negative constant such that $|f(z)| \le M$, $\forall z \in C$ at which $f(z)$ is defined the using the above result show that

$$\left| \int_C f(z)dz \right| \le ML .$$

যদি $w(t): \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $a \le t \le b$ অবিচ্ছিন্ন হয়, তেন্তে

$$\left| \int_a^b w(t)dt \right| \le \int_a^b |w(t)| dt .$$

ধৰি লোৱা হ'ল $C$, $L$ দৈর্ঘ্যৰ contour হয় আৰু $f, C$ ত অবিচ্ছিন্ন হয়। যদি $M$ অঋণাত্মক ধ্রুৱক হয় যাতে সকলো $\forall z \in C$ ৰ বাবে $|f(z)| \leq M$ । উপৰৰ ফলাফল ব্যৱহাৰ কৰা দেখুওৱা যে

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \leq ML .$$

*(iii)* State and prove Liouville's theorem.

Liouville-ৰ উপপাদ্যটো লিখা আৰু প্ৰমাণ কৰা।

*(iv)* Suppose that a function $f(z)$ is continuous in a domain $D$. Show that the following statements are equivalent:

*(a)* The integrals of $f(z)$ along contours lying entirely in $D$ and extending from any fixed point $z_1$ to any fixed point $z_2$ all have the same value.

*(b)* The integrals of $f(z)$ around closed contours lying entirely in $D$ all have value zero.

ধৰি লোৱা যে এটা ফলন $f(z)$ এটা domain $D$ ত অবিচ্ছিন্ন হয়। দেখুওৱা যে নিম্নলিখিত বিবৃতিসমূহ সমতুল্য ঃ



*(a)* সম্পূৰ্ণৰূপে $D$ ত থকা আৰু যিকোনো স্থিৰ বিন্দু $z_1$ ৰ পৰা যিকোনো স্থিৰ বিন্দু $z_2$লৈ বিস্তৃত contour ত $f(z)$ ৰ সকলো অনুকলবোৰৰ মান একে।

*(b)* সম্পূৰ্ণৰূপে $D$ ত থকা বন্ধ contour ত $f(z)$ ৰ সকলো অখণ্ডবোৰৰ মান শূন্য।

College Library