Total number of printed pages–11

1 (Sem–4/AR) MAT 01 (A)

2026

MATHEMATICS

(Major/Minor–1)

Ananda Ram Dhekial Phookan College Library * Nagaon : Assam *
Acc. No.
Date

Paper : MAT0400104

(Real Analysis)

Full Marks : 60

Time : 2½ hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

*Answer **either** in English **or** in Assamese.*

1. Answer the following questions : 1×8=8

তলৰ প্ৰশ্নসমূহৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) Write the Triangle Inequality property of the real numbers.

বাস্তৱ সংখ্যাৰ ত্ৰিভূজ অসমতা ধৰ্মটো লিখা।

(b) If $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ find the *inf A*.

$A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ হলে *inf A* নিৰ্ণয় কৰা।

(c) Write True **or** False :

"The unit interval [0, 1] is countable."

সত্য *নে* অসত্য লিখা ঃ

"একক অন্তৰাল [0, 1] গণনযোগ্য।"

(d) List the first *five* terms of the following sequence :

তলৰ অনুক্ৰমটোৰ প্ৰথম *পাঁচটা* ৰাশি লিখা ঃ

$$x_1 = 1,\ x_{n+1} = 3x_n + 1$$

(e) Define Squeeze Theorem.

Squeeze সূত্ৰৰ সংজ্ঞা দাঙি ধৰা।

(f) Write the divergence criteria of a sequence.

অনুক্ৰমৰ অপ্ৰসাৰিতাৰ চৰ্তটো লিখা।

(g) Under what condition the *p*-series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ is divergent?

কোন চৰ্ত সাপেক্ষে $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ *p*-শ্ৰেণী অপসাৰী হয়?

(h) Give an example of a series in $\mathbb{R}$ which is convergent but not absolutely convergent.

বাস্তৱ সংখ্যাৰ এটি শ্ৰেণীৰ উদাহৰণ দাঙি ধৰা যিটো অভিসাৰী হয় কিন্তু পৰম অভিসাৰী নহয়।

Dhekial Phookan College Library * Nagaon : Assam * Acc. No. Date

2. Answer ***any six*** of the following questions : 2×6=12

তলৰ প্ৰশ্নসমূহৰ পৰা *যিকোনো ছয়টাৰ* উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) If $a \in \mathbb{R}$ and $a \neq 0$ then show that $a^2 > 0$.

যদি $a \in \mathbb{R}$ আৰু $a \neq 0$ হয় তেন্তে দেখুওৱা যে $a^2 > 0$.

(b) Determine the set A of $x \in \mathbb{R}$ such that $|2x+3|<7$.

$x \in \mathbb{R}$-ৰ নিমিত্তে সংহতি A নির্ণয় কৰা যাতে $|2x+3|<7$.

(c) Let $A=\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. Show that the set A has lower bound but no upper bounds. Show that $inf\ A = 0$.

ধৰা $A=\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ দেখুওৱা যে A সংহতিটোৰ নিম্ন সীমা আছে কিন্তু উচ্চ সীমা নাই। দেখুওৱা যে $inf\ A = 0$.

(d) Use the definition of the limit of a sequence to establish the following limit :

$$lim\left(\frac{2n}{n+1}\right)=2$$

অনুক্রমৰ limit-ৰ সংজ্ঞা ব্যবহাৰ কৰি তলৰ অনুক্রমটোৰ limit প্রতিষ্ঠা কৰা ঃ

$$lim\left(\frac{2n}{n+1}\right)=2$$

(e) Establish either convergence or the divergence of the sequence :

অনুক্রমটোৰ অভিসাৰীতা বা অপ্রসাৰীতা প্রতিষ্ঠা কৰা ঃ

$$x_n = \frac{2n^2+3}{n^2+1}$$

(f) Show that the sequence $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ is a Cauchy sequence.

দেখুওৱা যে $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ অনুক্রমটো Cauchy অনুক্রম।

(g) Is the sequence $(n \sin n)$ properly divergent? Justify your answer.

$(n \sin n)$ অনুক্রমটো প্রকৃত অপসাৰী হয়নে? যুক্তিসহ উত্তৰ দিয়া।

(h) Show that the series $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ is divergent.

দেখুওৱা যে $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ শ্রেণীটো অপসাৰী।

(i) Use comparison test to show that the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$ is convergent.

তুলনামূলক পৰীক্ষাৰ সহায়ত দেখুওৱা যে $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$ শ্ৰেণীটো অভিসাৰী।

(j) Prove that if a series in $\mathbb{R}$ is absolutely convergent then it is convergent.

প্ৰমাণ কৰা যে, বাস্তৱ সংখ্যাৰ পৰম অভিসাৰী শ্ৰেণী অভিসাৰী হয়।

3. Answer ***any four*** of the following questions : 5×4=20

তলৰ প্ৰশ্নসমূহৰ পৰা *যিকোনো চাৰিটাৰ* উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) State and prove Archimedean Property.

'আৰ্কিমিডিছৰ ধৰ্ম'টো সংজ্ঞা আগবঢ়াই প্ৰমাণ কৰা।

(b) If $X=(x_n)$ converges to x and $Z=(z_n)$ is a sequence of non-zero real numbers that converges to z and if $z \neq 0$, then prove that the quotient sequence $\frac{X}{Z}$ converges to $\frac{x}{z}$.

College Library Phone No. Date Accession No. Nagaon, Assam

যদি $X=(x_n)$ অনুক্ৰমটো x লৈ অভিসাৰী আৰু $Z=(z_n)$ অশূন্য বাস্তৱ সংখ্যাৰ অনুক্ৰমটো z লৈ অভিসাৰী আৰু যদি $z \neq 0$ তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $\frac{X}{Z}$ ভাগফল অনুক্ৰমটো $\frac{x}{z}$ লৈ অভিসাৰী হয়।

(c) Establish the convergence and find the limit of the sequence :

অনুক্ৰমটোৰ অভিসাৰীতা প্ৰতিষ্ঠা কৰা আৰু অনুক্ৰমটোৰ limit নিৰ্ণয় কৰা ঃ

$$\left(\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\right)$$

(d) Show that the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ is convergent.

দেখুওৱা যে $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ শ্ৰেণীটো অভিসাৰী।

(e) Establish the convergence or divergence of the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ শ্ৰেণীটো অভিসাৰী নে অপসাৰী প্ৰতিষ্ঠা কৰা।

(f) Verify whether the series

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\right)$ convergent or divergent.

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\right)$ শ্রেণীটো অভিসাৰী নে অপসাৰী নিৰীক্ষণ কৰা।

(g) Show that the series $\sum_{n=1}^{\infty} \cos n$ is divergent.

দেখুওৱা যে $\sum_{n=1}^{\infty} \cos n$ শ্রেণীটো অপসাৰী।

(h) If Σa_n with $a_n > 0$ is convergent, there is $\Sigma\sqrt{a_n}$ always convergent. Either prove it or give a counter example.

যদি $a_n > 0$-ৰ বাবে Σa_n অভিসাৰী তেন্তে $\Sigma\sqrt{a_n}$ শ্রেণীটো সদায় অভিসাৰী হ'বনে? যদি হয় প্রমাণ কৰা নহলে প্রতিউদাহৰণ দাঙি ধৰা।

4. Answer ***any two*** of the following questions : 10×2=20

তলৰ প্রশ্নসমূহৰ পৰা *যিকোনো দুটাৰ* উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) State and prove Monotone Convergence Theorem.

একদিষ্ট অভিসাৰী উপপাদ্যটো বিবৃতি আৰু প্রমাণ দিয়া।

(b) (i) Show that the sequence $\left(n+\frac{(-1)^n}{n}\right)$ is not a Cauchy sequence.

দেখুওৱা যে $\left(n+\frac{(-1)^n}{n}\right)$ অনুক্রমটো Cauchy অনুক্রম নহয়।

(ii) Establish the proper divergence of the sequence $\left(\frac{n}{\sqrt{n+1}}\right)$.

প্রতিষ্ঠা কৰা যে, $\left(\frac{n}{\sqrt{n+1}}\right)$ অনুক্রমটো প্রকৃত অপসাৰী অনুক্রম।

Dhekial Phookan College Library * Acc. No. * Date * Nagaon : Assam *

(c) Show that the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ is conditionally convergent but not absolutely convergent.

দেখুওৱা যে $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ শ্রেণীটো চর্তসাপেক্ষে অভিসাৰী কিন্তু পৰম অভিসাৰী নহয়।

(d) If a series in $\mathbb{R}$ is absolutely convergent then prove that it is convergent.

যদি এটা বাস্তৱ সংখ্যাৰ শ্রেণী পৰম অভিসাৰী হয় তেন্তে প্রমাণ কৰা যে এই শ্রেণীটো অভিসাৰী হ'ব।

(e) If the series $\sum_n x_n$ and $\sum_n y_n$ are convergent, then show that $\sum_n (x_n + y_n)$ is also convergent. Does the similar result hold in case of $\sum_n x_n y_n$? Justify your answer.

যদি $\sum_n x_n$ আৰু $\sum_n y_n$ এই শ্রেণী দুটা অভিসাৰী হয়, তেনেহলে দেখুওৱা যে $\sum_n (x_n + y_n)$ শ্রেণীটোও অভিসাৰী হ'ব। $\sum_n x_n y_n$ শ্রেণীটোৰ বাবেও এই একেটা কথাই প্রযোজ্য হ'বনে? তোমাৰ উত্তৰৰ সত্যতা প্রতিপন্ন কৰা।

Anandaram Dhekial Phookan College Library * Acc. No. Date * Nagaon : Assam *