

Total number of printed pages-11

1 (Sem-1/FYUGP) MAT41MN/(A)

2025

MATHEMATICS

(Minor)

Paper : MAT4100104 MN

(SET-A)

(Classical Algebra)

Full Marks : 60

Time : 2½ hours

**The figures in the margin indicate
full marks for the questions.**

Answer **either** in English **or** in Assamese.

1. Answer the following questions : $1 \times 8 = 8$

নিম্নোক্ত প্রশ্নসমূহৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) Write the argument of the complex number $(-1 - i)$.

$(-1 - i)$ জটিল সংখ্যাটোৰ কোণাংকটো লিখা।

(b) For $n \in \mathbb{Z}$, $(\sin\theta + i\cos\theta)^n = ?$

$n \in \mathbb{Z}$ -ৰ বাবে $(\sin\theta + i\cos\theta)^n = ?$

(c) Mention the general value of $\log(1-i)$.

$\log(1-i)$ -ৰ সাধাৰণ মানটো উল্লেখ কৰা।

(d) State Descartes's Rule of signs for negative roots of an equation.

এটা সমীকৰণৰ ঋণাত্মক মূলৰ সংখ্যাৰ ক্ষেত্ৰত ডেকাৰ্টৰ চিহ্নৰ নিয়মটোৰ উক্তিটো লিখা।

(e) Is $x^6 - 10x^5 + 25x^4 - 25x^2 + 10x - 1 = 0$ a reciprocal equation?

$$x^6 - 10x^5 + 25x^4 - 25x^2 + 10x - 1 = 0$$

সমীকৰণটো পাৰস্পৰিক হয়নে?

(f) If α, β, γ are the roots of

$$x^3 + px^2 + q = 0, \text{ then}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(Fill up the blank)

যদি $x^3 + px^2 + q = 0$ সমীকৰণৰ মূলকেইটা

$$\alpha, \beta, \gamma \text{ হয়, তেন্তে } \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \underline{\hspace{2cm}}।$$

(খালী স্থানখিনি পূৰ কৰা)

(g) Give examples of two non-zero matrices A and B such that AB is a zero matrix.

দুটা অশূন্য মৌলকক্ষ A আৰু B উদাহৰণ দিয়া যাতে AB এটা শূন্য মৌলকক্ষ হয়।

(h) What is the rank of a matrix in Echelon form?

Echelon-আকাৰত থকা মৌলকক্ষ এটাৰ কোটি কি হ'ব?

Answer **any six** questions from the following : 2×6=12

নিম্নোক্ত প্ৰশ্নসমূহৰ পৰা যিকোনো ছটাৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) Express $1 + \cos\alpha + i\sin\alpha$ in polar form.

$1 + \cos\alpha + i\sin\alpha$ -ক ধ্ৰুৱীয় আকাৰত প্ৰকাশ কৰা।

(b) Solve the equation $x^4 + i = 0$.

$x^4 + i = 0$ সমীকৰণটো সমাধান কৰা।

(c) Separate $e^{a+i\pi/2}$ into real and imaginary parts.

$e^{a+i\pi/2}$ জটিল সংখ্যাটোক বাস্তৱ আৰু কাল্পনিক অংশলৈ পৃথক কৰা।

(d) If the sum of two roots of the equation

$x^3 + 6x^2 - 3x + 18 = 0$ is zero, then solve it.

যদি $x^3 + 6x^2 - 3x + 18 = 0$ সমীকৰণৰ দুটা মূলৰ সমষ্টি শূন্য হয় তেন্তে তাক সমাধান কৰা।

(e) Prove that :

প্রমাণ কৰা যে :

$$i^i = e^{-(4n+1)\pi/2}, n \in \mathbb{Z}$$

(f) Using Descartes' rule of signs discuss briefly the nature of the roots of the

equation $x^6 + x^4 + x^2 + x + 3 = 0$.

ডেকাৰ্টৰ চিহ্নৰ নিয়ম ব্যৱহাৰ কৰি চমুকৈ

$x^6 + x^4 + x^2 + x + 3 = 0$ সমীকৰণটোৰ মূলসমূহৰ প্ৰকৃতি সম্পৰ্কে আলোচনা কৰা।

(g) If $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ and α_4 are the roots of the

equation $x^4 + p_2x^2 + p_3x + p_4 = 0$, then

show that $\Sigma\alpha^6 = 6p_2p_4 + 3p_3^2 - 2p_2^3$.

যদি $x^4 + p_2x^2 + p_3x + p_4 = 0$ সমীকৰণটোৰ

মূলকেইটা $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ আৰু α_4 হয়, তেন্তে দেখুওৱা

যে : $\Sigma\alpha^6 = 6p_2p_4 + 3p_3^2 - 2p_2^3$.

(h) Express a square matrix A as the sum of a symmetric and a skew-symmetric matrix.

এটা বৰ্গাকৃতিৰ মৌলকক্ষ A -ক এটা প্ৰতিসম আৰু এটা তীৰ্থক প্ৰতিসম মৌলকক্ষৰ সমষ্টি হিচাপে প্ৰকাশ কৰা।

(i) If A is a non-singular matrix, then show that $|A^{-1}| = (|A|)^{-1}$.

যদি A এটা অনাঐক্যবচনীয় মৌলকক্ষ হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে $|A^{-1}| = (|A|)^{-1}$.

(j) Establish that the rank of a matrix whose every element is equal to unity is 1.

এটা মৌলকক্ষৰ প্ৰতিটো উপাদান 1-ৰ সমান হ'লে তাৰ কোটি 1 হ'ব বুলি প্ৰতিষ্ঠা কৰা।

3. Answer **any four** : 5×4=20

যিকোনো চাৰিটাৰ উত্তৰ লিখা :

(a) If z_1 and z_2 are two complex numbers, then prove that $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

যদি z_1 আৰু z_2 দুটা জটিল সংখ্যা হয়, তেন্তে প্রমাণ কৰা যে $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

(b) For two complex numbers z and z' show that $E(z) \cdot E(z') = E(z + z')$.

দুটা জটিল সংখ্যা z আৰু z' -ৰ বাবে দেখুওৱা যে $E(z) \cdot E(z') = E(z + z')$.

(c) If z is a non-zero complex number and m is a positive integer, then prove that

$$\text{Log } z^m \neq m \text{Log } z.$$

যদি z এটা অশূন্য জটিল সংখ্যা আৰু m এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হয়, তেন্তে প্রমাণ কৰা যে

$$\text{Log } z^m \neq m \text{Log } z.$$

(d) Expand $\sin^4 \theta \cos^2 \theta$ in a series of cosines of multiples of θ .

$\sin^4 \theta \cos^2 \theta$ -ক θ -ৰ গুণিতকৰ কোচাইনৰ শ্ৰেণীত বিস্তাৰ কৰা।

(e) If $f(x)$ is a polynomial with real coefficients and $f(x) = 0$ has n real roots, then prove that $f'(x) = 0$ has at least $(n-1)$ real roots.

যদি $f(x)$ এটা বাস্তৱ সহগবিশিষ্ট বহুপদ ফলন হয় আৰু $f(x) = 0$ -ৰ n -টা বাস্তৱ মূল থাকে, তেন্তে প্রমাণ কৰা যে $f'(x) = 0$ সমীকৰণৰ অতি কমপক্ষেও $(n-1)$ টা বাস্তৱ মূল থাকিব।

(f) Solve $x^3 - 12x + 8 = 0$ by Cardano's method.

$x^3 - 12x + 8 = 0$ সমীকৰণটোক কাৰ্ডানৰ পদ্ধতিৰে সমাধান কৰা।

(g) If A is a n -rowed non-singular matrix, then show that $\text{adj}(\text{adj } A) = |A|^{n-2} \cdot A$.

যদি A এটা অনাএকবচনীয়া n -শাৰীযুক্ত মৌলকক্ষ হয় তেন্তে দেখুওৱা যে $\text{adj}(\text{adj } A) = |A|^{n-2} \cdot A$.

(h) Determine the rank of the matrix A where :

A মৌলকক্ষটোৰ কোটি নিৰ্ণয় কৰা য'ত :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 7 & 5 \\ 2 & 5 & 11 & 6 \end{bmatrix}$$

4. Answer (a) or (b) and **any one** of (c), (d) and (e) :

(a) অথবা (b) আৰু (c), (d) আৰু (e)-ৰ যিকোনো এটাৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) (i) If $x = \cos\theta + i\sin\theta$ and $\sqrt{1-c^2} = nc - 1$ then show that

$$1 + c\cos\theta = \frac{c}{2n}(1 + nx)\left(1 + \frac{n}{x}\right).$$

যদি $x = \cos\theta + i\sin\theta$ আৰু

$\sqrt{1-c^2} = nc - 1$ তেন্তে দেখুওৱা যে

$$1 + c\cos\theta = \frac{c}{2n}(1 + nx)\left(1 + \frac{n}{x}\right).$$

(ii) Solve the biquadratic equation

$$x^4 - 8x^2 - 4x + 3 = 0 \text{ by Euler's method.}$$

6

অয়লাৰৰ পদ্ধতিৰে $x^4 - 8x^2 - 4x + 3 = 0$ চতুৰ্থাৰ্থীয় সমীকৰণটো সমাধান কৰা।

(b) (i) For any two complex numbers u and v , prove that :

$$\sinh(u+v) = \sinh u \cosh v + \cosh u \cdot \sinh v.$$

4

যিকোনো দুটা জটিল সংখ্যা u আৰু v -ৰ বাবে প্রমাণ কৰা যে :

$$\sinh(u+v) = \sinh u \cosh v + \cosh u \cdot \sinh v.$$

(ii) If the equation

$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$ has two equal roots, then show that each

of them is equal to $\frac{bc - ad}{2(ac - b^2)}$.

6

যদি $ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$

সমীকৰণটোৰ দুটা সমান মূল থাকে, তেন্তে দেখুওৱা যে সমান মূল দুটাৰ প্ৰত্যেকৰে মান

$$\frac{bc - ad}{2(ac - b^2)}.$$

(c) (i) Find the inverse of A where :

A মৌলকম্ৰটোৰ প্ৰতিলোম উলিওৱা য'ত :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

5

- (ii) If A and B are non-singular square matrices of the same order, then prove that AB is invertible and $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. 5

যদি A আৰু B দুটা অনাএকবচনীয় একে ক্ৰমৰ বৰ্গাকৃতিৰ মৌলকক্ষ হয় তেন্তে প্রমাণ কৰা যে AB -প্রতিলোমীয় হয় আৰু

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

- (d) (i) Reduce the following matrix to echelon form and hence find its rank : 5

নিম্নোক্ত মৌলকক্ষটোক একেলন আকাৰলৈ লঘুকৃত কৰা আৰু তাৰপৰা ইয়াৰ কোটি নির্ণয় কৰা :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

- (ii) If A is an invertible matrix, then show that A^T is also invertible and $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. 2+3=5

যদি A এটা প্রতিলোমীয় মৌলকক্ষ হয় তেন্তে দেখুওৱা যে A^T -ও প্রতিলোমীয় হয় আৰু $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

- (e) (i) Find the general solution of the following linear homogeneous system : 5

নিম্নোক্ত একক সমঘাতীয় সমীকৰণ প্ৰণালীটো সাধাৰণ সমাধান উলিউৱা :

$$x - 2y + z - w = 0$$

$$x + y - 2z + 3w = 0$$

$$4x + y - 5z + 8w = 0$$

$$5x - 7y + 2z - w = 0$$

- (ii) Show that the only real value of λ for which the following system of equations has non-zero solutions is 6 : 5

দেখুউৱা যে নিম্নোক্ত সমীকৰণ প্ৰণালীটোৰ অশূন্য সমাধান থাকিবলৈ হ'লে λ -ৰ একমাত্ৰ বাস্তৱ মানটো হ'ব 6 :

$$x + 2y + 3z = \lambda x$$

$$3x + y + 2z = \lambda y$$

$$2x + 3y + z = \lambda z$$

