

Total number of printed pages-8

1 (Sem-1/Ar) MAT 01-N

2025

MATHEMATICS

Acc. No.

Date Paper : MAT0100104/MAT0100104-N

(Classical Algebra)

Full Marks : 60

Time : 2½ hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

1. Answer the following questions : $1 \times 8 = 8$

তলত প্রশ্নসমূহৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) State De Moivre's Theorem.

ডি মইভাৰ-ৰ উপপাদ্যটো উল্লেখ কৰা।

(b) What is meant by the degree of a polynomial ?

বহুপদীৰ ঘাত বুলিলে কি বুজায় ?

(c) What is the order of matrix with 3 rows and 2 columns ?

৩টা শাৰী আৰু ২টা স্তম্ভ থকা মেট্ৰিক্সৰ ক্ৰম কি ?

(d) Cardan's method is used to solve which equation?

কার্ডানৰ পদ্ধতি কোনটো সমীকৰণ সমাধান কৰিবলৈ ব্যৱহাৰ কৰা হয়?

(e) What is meant by the n th roots of unity?

ঐক্যৰ n তম মূল কিমানটা?

(f) What is symmetric matrix?

সমমিত মেট্ৰিক্স কি?

(g) Find the transpose of the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

ট্ৰান্সপোজ উলিওৱা।

(h) Find the sum of the roots of $x^2 - 5x + 6 = 0$

$x^2 - 5x + 6 = 0$ -ৰ মূল সমূহৰ যোগফল উলিওৱা।

2. Write short answer on the following : (any six)

$$2 \times 6 = 12$$

নিম্নোক্ত কেইটাৰ চমু উত্তৰ দিয়া : (যিকোনো ছয়টা)

(a) Evaluate using De Moivre's Theorem.

$$(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)^3$$

ডি মইভৰ উপপাদ্য ব্যৱহাৰ কৰি

$(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)^3$ -ৰ মান উলিওৱা।

(b) Find the value of $z + \bar{z}$ for $Z = 2 - 3i$,
 $z = 2 - 3i$ হলে $z + \bar{z}$ -ৰ মান উলিওৱা।

(c) Find the value of $\alpha + \beta$ and $\alpha\beta$. If α, β are roots of $2x^2 - 4x + 1 = 0$.

$2x^2 - 4x + 1 = 0$ -ৰ মূল α, β হলে, $\alpha + \beta$ আৰু $\alpha\beta$ মান কিমানটা?

(d) Find the rank of the matrix $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ মেট্ৰিক্সৰ ৰেংক উলিওৱা।

(e) Find one real root of the equation $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$

$x^3 - x^2 - x + 1 = 0$ -ৰ এটা বাস্তৱ মূল উলিওৱা।

(f) Find the principal value of amplitude of $\sqrt{3} - i$.

$\sqrt{3} - i$ -ৰ বিস্তাৰৰ প্ৰধান মানটো উলিওৱা।

(g) If $1 - i$ is a root of $x^4 + x^2 - 2x + 6 = 0$, find the other roots of it.

যদি $1 - i$, $x^4 + x^2 - 2x + 6 = 0$ -ৰ এটা মূল হয়, তেন্তে ইয়াৰ আন মূলবোৰ উলিওৱা।

(h) Show that $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ holds for a non-singular matrix A.



দেখুওৱা যে $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ পৰাবৰ্তনীয় (non-singular) মৌলকক্ষ A-ৰ বাবে প্ৰযোজ্য।

(i) Express $-1-i$ in polar form.

$-1-i$ -ৰ ধ্ৰুৱীয় ৰূপত প্ৰকাশ কৰা।

(j) Define symmetric functions of the roots of an equation. Give one example.

3. Answer the following questions : (any four)
5×4=20

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া : (যিকোনো চাৰিটা)

(a) State and prove de Moivre's theorem for integral powers.

অৰ্থাৎ যাতৰ বা ডি মহভাৰ-ৰ উপপাদ্যটো লিখা আৰু প্ৰমাণ কৰা।

(b) If $z = x + iy$ prove that

$$|\sin hy| \leq |\sin z| \leq \cosh y.$$

যদি $z = x + iy$ তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$|\sin hy| \leq |\sin z| \leq \cosh y.$$

(c) Find the square roots of the complex number $-7 + 24i$.

জটিল সংখ্যা $-7 + 24i$ -ৰ বৰ্গমূলসমূহ উলিওৱা।

(d) State the fundamental theorem of Algebra. Find the roots of

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

বীজগণিতিক মৌলিক উপপাদ্য উল্লেখ কৰা। তলৰ সমীকৰণটোৰ মূলগমৰ উলিওৱা—

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

(e) If α, β, γ are the roots of the equation $x^3 + lx^2 + mx + n = 0$, then find the value of $\sum \alpha^2$ and $\sum \alpha^3$.

যদি α, β, γ সমীকৰণ $x^3 + lx^2 + mx + n = 0$ ৰ মূল হয়, তেন্তে $\sum \alpha^2$ আৰু $\sum \alpha^3$ -ৰ মান উলিওৱা।

(f) Let A be any square matrix. Prove that $A + A^T$ is symmetric and $A - A^T$ is skew-symmetric. Moreover, show that there is one and only one way to write A as the sum of a symmetric matrix and a skew-symmetric matrix.

ধৰা হ'ল A যিকোনো এটা বৰ্গ মৌলকক্ষ। $A + A^T$ প্ৰতিসম আৰু $A - A^T$ তিৰ্যক (skew) প্ৰতিসম বুলি প্ৰমাণ কৰা। তদুপৰি, দেখুওৱা যে A-ৰ প্ৰতিসম মৌলকক্ষ আৰু তিৰ্যক (skew) প্ৰতিসম মৌলকক্ষৰ যোগফল হিচাপে লিখাৰ এটা আৰু এটাই উপায় আছে।

(g) Reduce the following matrix to row echelon form determine its rank and identify the basic columns.

নিম্নলিখিত মৌলকক্ষটোক শাৰী ইচেলন আকৃতিলৈ নিয়া, ইয়াৰ জাতি নিৰ্ধাৰণ কৰা আৰু মূল স্তম্ভসমূহ চিনাক্ত কৰা।

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 9 \\ 2 & 6 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

(h) Find the inverse of the matrix :

প্ৰাথমিক শাৰী অপাৰেশ্যন ব্যৱহাৰ কৰি তলৰ মেট্ৰিক্সটোৰ ইনভাৰ্ছ উলিওৱা।

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Answer the following : (any two) 10×2=20

তলৰ প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) Find the equation whose roots are the roots of the equation $x^4 - 8x^2 + 8x + 6 = 0$, each diminished by 2.

Use Descarte's rule of signs to both equations to find the possible number of real and complex roots.

সেই সমীকৰণটো উলিওৱা যাৰ মূলবোৰ সমীকৰণ

$x^4 - 8x^2 + 8x + 6 = 0$ -ৰ মূল প্ৰত্যেকটো 2-ৰে হ্রাস কৰা। বাস্তৱ আৰু জটিল মূলৰ সম্ভাৱ্য সংখ্যা বিচাৰি উলিয়াবলৈ দুয়োটা সমীকৰণলৈ ডেকাৰ্টৰ চিহ্নৰ নিয়ম ব্যৱহাৰ কৰা।

(b) (i) Prove that
প্ৰমাণ কৰা যে

$$\sin^4 \theta \cos^2 \theta = \frac{1}{32} (\cos 6\theta - 2\cos 4\theta - \cos 2\theta + 2) - 3$$

(ii) Solve by Euler's method :
অইলাৰৰ পদ্ধতিৰে সমাধান কৰা :

$$x^4 - 2x^2 + 8x - 3 = 0 \quad 7$$

(c) For an $n \times n$ matrix A. Prove that the following statements are equivalent.

$n \times n$ মৌলকক্ষ A-ৰ বাবে তলত দিয়া বিবৃতিবোৰ সমতুল্য বুলি প্ৰমাণ কৰা :

(i) A^{-1} exists

A^{-1} ৰ- অস্তিত্ব আছে

(ii) rank (A) = n

জাতি (A) = n

(iii) $Ax = 0$ implies that $x = 0$

$Ax = 0$ -ৰ অৰ্থ হ'ল $x = 0$

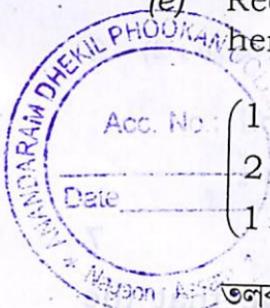
(d) Solve the cubic equation using Cardon's method :

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$$

কার্ডানৰ পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি তলৰ ঘন সমীকৰণটো সমাধান কৰা —

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$$

(e) Reduce the matrix to normal form and hence find the rank :


$$\text{Acc. No.} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

তলৰ মেট্ৰিক্সটো স্বাভাবিক ৰূপলৈ ৰূপান্তৰিত কৰা আৰু ৰেংক উলিওৱা।