2018

MATHEMATICS

(General)

Paper : 5.1

(Statics and Dynamics)

Full Marks : 80

Time : 3 hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions

Answer either *in English* or *in Assamese*

1. Answer the following questions : 1×10=10

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা :

(a) What is the position of the point of action of the resultant of two equal like parallel forces acting on a rigid body?

এটা দৃঢ় পিণ্ডৰ ওপৰত ক্ৰিয়াশীল দুটা সমমানৰ সমমুখী সমান্তৰাল বলৰ লব্ধ বলে ক্ৰিয়া কৰা বিন্দুৰ অৱস্থান কি?

(b) What is the whole effect of a couple acting on a body?

এটা পিণ্ডৰ ওপৰত ক্ৰিয়াশীল বলযুগ্ম এটাৰ সমুদায় প্ৰতিক্ৰিয়া কি?

(c) A system of coplanar forces reduces to a couple and R is the algebraic sum of the moments of the forces about any point in their plane. What is the value of R?

এটা সামতলিক বল প্ৰণালী এটা বলযুগ্মলৈ ৰূপান্তৰিত হয় আৰু বলবিলাকৰ সমতলৰ যি কোনো এটা বিন্দু সাপেক্ষে সিহঁতৰ বলভ্ৰামকৰ বীজগণিতীয় সমষ্টি R. Rৰ মান কি?

(d) Define coefficient of friction.

ঘৰ্ষণ গুণাংকৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(e) Write the definition of force of friction.

ঘৰ্ষণ বলৰ সংজ্ঞা লিখা।

(f) Define angle of friction.

ঘৰ্ষণ কোণৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(g) Write down the expressions for radial and cross-radial accelerations of a particle moving in a plane curve at any point (r, θ) on it.

সমতলস্থ কোনো বক্ৰৰে গতি কৰা বস্তুকণা এটাৰ গতিপথৰ যি কোনো বিন্দু (r, θ)ত অৰীয় (radial) আৰু তিৰ্যক (cross-radial) ত্বৰণ লিখা।

(h) A particle moves in a straight line so that its acceleration is always directed to a fixed point and is equal to $\mu/(\text{distance})^3$. Write down its equation of motion.

এটা বস্তুকণাই এডাল সৰলৰেখাত এনেদৰে গতি কৰে যাতে বস্তুকণাৰ ত্বৰণ এটা নিৰ্দিষ্ট বিন্দুৰ দিশত হয় আৰু ত্বৰণৰ পৰিমাণ $\mu/(\text{দূৰত্ব})^3$ । ইয়াৰ গতিৰ সমীকৰণ লিখা ।

(i) If u be the velocity of projection and α be the angle of projection of a particle, write down the expression for the time of flight.

এটা বস্তুকণাৰ প্ৰক্ষেপ বেগ u আৰু প্ৰক্ষেপ কোণ α হ'লে ইয়াৰ উৰণকাল লিখা ।

(j) State the principle of conservation of energy.

শক্তিৰ সংৰক্ষণশীলতাৰ তত্ত্বটো লিখা ।

2. Answer the following questions : 2×5=10

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা :

(a) Two men are carrying a straight uniform bar 6 metres long and weighing 30 kg. One man supports it at a distance of 1 metre from one end, and the other man at a distance of 2 metres from the other end. What weight does each man bear?

দুজন মানুহে 30 kg ওজনৰ 6 মিটাৰ দীঘল সুষম দণ্ড এডাল কঢ়িয়াই আছে। এজনে দণ্ড ডালৰ এটা মূৰৰ পৰা 1 মিটাৰ আৰু আনজনে আনটো মূৰৰ পৰা 2 মিটাৰ দূৰত ধৰি থাকিলে, প্ৰতিজনে কিমান ওজন বহন কৰিব ?

(b) Write the laws of statical friction.
স্থৈতিক ঘৰ্ষণৰ সূত্ৰসমূহ লিখা।

(c) A point moves in a circle of radius r with a speed v. Prove that its angular velocity is $\frac{v}{r}$.
r ব্যাসাৰ্ধৰ এটা বৃত্তত এটা বিন্দুৱে v দ্ৰুতিৰে গতি কৰে। প্ৰমাণ কৰা যে কেন্দ্ৰ সাপেক্ষে ইয়াৰ কৌণিক বেগ $\frac{v}{r}$.

(d) A particle moves in a straight line according to the law $v^2 = ax^2 + 2bx + c$, where x is the distance from fixed point on the line. Find its acceleration.
এটা বস্তুকণাই $v^2 = ax^2 + 2bx + c$ নিয়মানুসৰি সৰলৰেখাত গতি কৰে, য'ত x ৰেখাডালৰ ওপৰত থকা এটা নিৰ্দিষ্ট বিন্দুৰ পৰা ইয়াৰ দূৰত্ব। ইয়াৰ ত্বৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

(e) A bullet of mass m moving with a velocity u strikes a block of mass M which is free to move in the direction of motion of the bullet and is embedded in it. Show that a portion $\frac{M}{M+m}$ of the kinetic energy is lost.
m ভৰৰ গুলী এটা u বেগেৰে গৈ M ভৰৰ পিণ্ড এটাক খুন্দা মাৰে। যদি পিণ্ডটো গুলীৰ দিশত মুক্তভাৱে চলাচল কৰিব পাৰে আৰু গুলীটো পিণ্ডটোৰ ভিতৰত সোমাই যায়, তেন্তে দেখুওৱা যে গতিশক্তিৰ $\frac{M}{M+m}$ অংশ হ্ৰাস পায়।

3. Answer the following questions : 5×4=20

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা :

(a) Prove that any system of coplanar forces acting on a rigid body can ultimately be reduced either to a single force or to a single couple unless the system is in equilibrium.

এটা দৃঢ় পিণ্ডৰ ওপৰত ক্ৰিয়াশীল সমতলীয় বল প্ৰণালী এটাক অৱশেষত এটা বল অথবা বলযুগ্মত পৰিণত কৰিব পাৰি বুলি প্ৰমাণ কৰা, যদিহে বল প্ৰণালীটো সাম্যাৱস্থাত নাথাকে।

Or / অথবা

A beam whose centre of gravity divides it into two portions a and b is placed inside a smooth hollow sphere. Show that if θ be its inclination to the horizon in the position of equilibrium and 2α be the angle subtended by the beam at the centre of the sphere, then $\tan\theta = \dfrac{b-a}{b+a}\tan\alpha$.

এটা নিমজ ফোপোলা গোলকৰ ভিতৰত এডাল দণ্ড ৰখা হৈছে যাৰ ভাৰ কেন্দ্ৰই ইয়াক a আৰু b দুটা অংশত বিভক্ত কৰিছে। সাম্যাৱস্থাত দণ্ডডালে অনুভূমিকৰ লগত θ কোণ কৰিলে আৰু গোলকৰ কেন্দ্ৰত 2α কোণ আগুৰি থাকিলে, দেখুওৱা যে $\tan\theta = \dfrac{b-a}{b+a}\tan\alpha$.

(b) A uniform rod rests on two rough pegs A and B. AB is inclined at an angle α to the horizontal and the coefficients of friction are μ_1 and μ_2 respectively. If the rod is in limiting equilibrium and the centre of the rod divides AB into two parts a and b, prove that $\tan\alpha = \dfrac{\mu_1 b + \mu_2 a}{a+b}$.

এডাল সুষম দণ্ড দুটা খহটা খুঁটি A আৰু Bৰ ওপৰত বৈ আছে। ABয়ে অনুভূমিকৰ লগত α কোণ কৰি আছে, μ_1 আৰু μ_2 ক্ৰমে A আৰু Bৰ ঘৰ্ষণ গুণাংক। যদি দণ্ডডাল চৰম সাম্যাৱস্থাত থাকে আৰু দণ্ডডালৰ কেন্দ্ৰই ABক a আৰু b দুটা ভাগত ভাগ কৰে, প্ৰমাণ কৰা যে $\tan\alpha = \dfrac{\mu_1 b + \mu_2 a}{a+b}$.

Or / অথবা

Define simple harmonic motion (SHM). The position of a particle moving in a straight line is given by $x = a\cos nt + b\sin nt$. Prove that it executes SHM and amplitude is $\sqrt{a^2 + b^2}$.

সৰল সমঞ্জস গতিৰ সংজ্ঞা দিয়া। সৰলৰৈখিক গতিশীল এটা বস্তুকণাৰ অৱস্থান $x = a\cos nt + b\sin nt$. প্ৰমাণ কৰা যে ই সৰল সমঞ্জস গতি কৰে আৰু বিস্তাৰ $\sqrt{a^2 + b^2}$.

(c) A particle describing an SHM in a straight line has velocities v_1, v_2 and v_3 at distances x_1, x_2 and x_3 respectively from the centre of the path, prove that

$$x_1^2(v_2^2 - v_3^2) + x_2^2(v_3^2 - v_1^2) + x_3^2(v_1^2 - v_2^2) = 0$$

সৰল সমঞ্জস গতি কৰা কণিকা এটাৰ গতিপথৰ কেন্দ্ৰৰ পৰা দূৰত্ব x_1, x_2 আৰু x_3ত বেগ ক্ৰমে v_1, v_2 আৰু v_3 হ'লে, প্ৰমাণ কৰা যে

$$x_1^2(v_2^2 - v_3^2) + x_2^2(v_3^2 - v_1^2) + x_3^2(v_1^2 - v_2^2) = 0$$

(d) If R be the horizontal range and h the greatest height of a projectile, prove that initial velocity is

$$\left[2g\left(h + \frac{R^2}{16h}\right)\right]^{1/2}$$

এটা প্ৰক্ষেপ্যৰ অনুভূমিক পৰিসৰ R আৰু সৰ্বোচ্চ উচ্চতা h হ'লে, প্ৰমাণ কৰা যে তাৰ প্ৰক্ষেপ্য বেগ

$$\left[2g\left(h + \frac{R^2}{16h}\right)\right]^{1/2}$$

4. Answer *either* (a) or (b) : 10

(a) অথবা (b)ৰ উত্তৰ কৰা :

(a) (i) Find the CG of the area of the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ lying in the first quadrant. 5

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তৰ প্ৰথম চ'কত থকা ক্ষেত্ৰৰ ভাৰকেন্দ্ৰ নিৰ্ণয় কৰা।

(ii) Find the position of centre of gravity (CG) of a system of particles lying in a vertical plane. 5

এখন উলম্ব সমতলত থকা কিছুমান বস্তুকণাৰ ভাৰকেন্দ্ৰৰ স্থান নিৰ্ণয় কৰা।

(b) *(i)* Find the centre of gravity of a uniform triangular lamina and hence show that it is the same as that of three equal particles placed at the vertices. 5

এটা সুষম ত্ৰিভুজৰ ভাৰকেন্দ্ৰ নিৰ্ণয় কৰা আৰু দেখুওৱা যে ই ত্ৰিভুজটোৰ শীৰ্ষবিন্দু তিনিটাত ৰখা তিনিটা সমান ভৰৰ বস্তুকণাৰ ভাৰকেন্দ্ৰৰ সমান।

(ii) The weights 1, 5, 3, 4, 2 and 6 kg are placed respectively at the angular points of a regular hexagon in order. Prove that the centre of the hexagon coincides with the CG of the system. 5

এটা সুষম ষড়ভুজৰ কৌণিক বিন্দুবোৰত 1, 5, 3, 4, 2 আৰু 6 kg ওজন ক্ৰমিকভাৱে ৰখা হৈছে। প্ৰমাণ কৰা যে ষড়ভুজৰ কেন্দ্ৰ আৰু ওজনকেইটাৰ ভাৰকেন্দ্ৰ মিলি যায়।

5. Answer *either (a)* or *(b)* : 10

(a) অথবা *(b)*ৰ উত্তৰ কৰা :

(a) Define machine and mechanical advantage, velocity ratio and efficiency of a machine. In a machine, establish the relation

mechanical advantage

$$= (\text{velocity ratio} \times \text{efficiency})$$

4+6=10

যন্ত্ৰ আৰু যন্ত্ৰৰ যান্ত্ৰিক সুবিধা, বেগানুপাত আৰু দক্ষতাৰ সংজ্ঞা দিয়া। এটা যন্ত্ৰৰ ক্ষেত্ৰত—

যান্ত্ৰিক সুবিধা = (বেগানুপাত × দক্ষতা) সম্পৰ্কটো প্ৰতিপন্ন কৰা।

(b) *(i)* Draw a neat diagram of the third system of pulleys. If there are n pulleys of which the upper one is fixed and remaining $(n-1)$ are movable, find the mechanical advantage when weights of the pullies are neglected. 5

তৃতীয় কপিকল প্ৰণালীৰ এটা পৰিষ্কাৰ চিত্ৰ আঁকা। যদি প্ৰণালীটোত n সংখ্যক চকৰী থাকে য'ত উচ্চতম চকৰীটো স্থিৰ আৰু বাকী $(n-1)$ সংখ্যক চকৰী লৰচৰ কৰিব পাৰে, তেন্তে চকৰীৰ ওজন অগ্ৰাহ্য কৰিলে, ইয়াৰ যান্ত্ৰিক সুবিধা নিৰ্ণয় কৰা।

(ii) In a block and tackle, the velocity ratio is 8 : 1. The friction is such that only 55% of the force applied can be usefully employed. Find what force will raise 66 kg by its use. 5

এটা ব্লক এণ্ড টেক্‌ল (block and tackle)ৰ বেগানুপাত 8 : 1। প্ৰণালীটোত থকা ঘৰ্ষণৰ বাবে প্ৰয়োগ কৰা বলৰ কেৱল 55% হে যথাযথভাৱে নিয়োগ কৰিব পাৰি। ইয়াৰ সহায়ত 66 kg ভৰ দাঙিবলৈ কি পৰিমাণৰ বল প্ৰয়োগ কৰিব লাগিব?

6. Answer *either* *(a)* or *(b)* : 10

(a) অথবা *(b)*ৰ উত্তৰ কৰা :

(a) *(i)* Obtain the expressions for tangential and normal components of acceleration of a particle moving along a plane curve. 5

সমতলস্থ কোনো বক্ৰৰে গতি কৰা এটা বস্তুকণাৰ স্পৰ্শক আৰু অভিলম্বৰ দিশত ত্বৰণৰ উপাংশ উলিওৱা।

(ii) A particle starts from rest at a distance a from a fixed point O and moves with an acceleration proportional to its distance from O, away from it. Find the position of the particles at any time t. 5

এটা নিৰ্দিষ্ট বিন্দু Oৰ পৰা a দূৰত্বত স্থিৰ অৱস্থাৰ পৰা কণিকা এটাই গতি আৰম্ভ কৰি O বিন্দুৰ পৰা তাৰ দূৰত্বৰ সমানুপাতী ত্বৰণেৰে O বিন্দুটোৰ পৰা আঁতৰলৈ যায়। t সময়ত বস্তুকণাটোৰ অৱস্থান নিৰ্ণয় কৰা।

(b) (i) A particle starts with a velocity u and moves under a retardation μ times the distance described. Show that the distance traversed before it comes to rest is $u/\sqrt{\mu}$. 5

এটা বস্তুকণাই অতিক্ৰম কৰা দূৰত্বৰ μ গুণ মন্থৰণৰ অধীনত u বেগেৰে গতি আৰম্ভ কৰে। দেখুওৱা যে বস্তুকণাটো $u/\sqrt{\mu}$ দূৰত্ব অতিক্ৰম কৰাৰ পাছত ৰৈ যায়।

(ii) The velocities of a particle along and perpendicular to the radius vector are λr and $\mu\theta$ respectively. Show that the acceleration along and perpendicular to the radius vector are $\lambda^2 r - \mu^2\theta^2/r$ and $\mu\theta(\lambda + \mu/r)$ respectively. 5

এটা বস্তুকণাৰ মূলবিন্দু আৰু কণাটো সংযোগী ৰেখা আৰু ইয়াৰ লম্বদিশৰ বেগ যথাক্ৰমে λr আৰু $\mu\theta$. দেখুওৱা যে মূলবিন্দু আৰু কণাটো সংযোগী ৰেখা আৰু ইয়াৰ লম্বদিশত ত্বৰণৰ মান যথাক্ৰমে $\lambda^2 r - \mu^2\theta^2/r$ আৰু $\mu\theta(\lambda + \mu/r)$।

7. Answer *either* *(a)* or *(b)* : 10

(a) অথবা *(b)*ৰ উত্তৰ কৰা :

(a) *(i)* A sphere impinges directly on an equal sphere at rest. If the coefficient of restitution is e, prove that a fraction $\frac{1}{2}(1-e^2)$ of the original kinetic energy is lost by the impact. 5

স্থিৰ অৱস্থাত থকা এটা গোলকক আন এটা সমান ভৰৰ গোলকে প্ৰত্যক্ষভাৱে খুন্দা মাৰে। প্ৰত্যাৱৰ্তন গুণাংক e হ'লে, প্ৰমাণ কৰা যে মূল গতিশক্তিৰ $\frac{1}{2}(1-e^2)$ অংশ সংঘৰ্ষত বিনষ্ট হয়।

(ii) Define impulse of a force. Prove that the impulse of a force is equal to the change in momentum due to the application of the force. 5

বলৰ আবেগৰ সংজ্ঞা দিয়া। প্ৰমাণ কৰা যে বল এটাৰ আবেগ, বলটো প্ৰয়োগ কৰাৰ ফলত হোৱা ভৰবেগৰ পৰিৱৰ্তনৰ সমান।

(b) (i) A shot of mass m penetrates a thickness S of a fixed plate of mass M. Show that if M is free to move, the thickness penetrated is $\left(\frac{S}{1+\frac{m}{M}}\right)$. 5

m ভৰৰ গুলি এটাই স্থিৰাৱস্থাত থকা M ভৰৰ তক্তা এখনৰ S দূৰত্ব ভেদ কৰি সোমাই যাব পাৰে। যদি তক্তাখন মুক্তভাৱে লৰচৰ কৰিব পৰাকৈ ৰখা হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে গুলিটোৱে তক্তাখনৰ $\left(\frac{S}{1+\frac{m}{M}}\right)$ দূৰত্ব ভেদ কৰিব।

(ii) Define work, power and energy with units. 5

এককসহ, কাৰ্য, সামৰ্থ্য আৰু শক্তিৰ সংজ্ঞা দিয়া।

★★★