

2013

MATHEMATICS

(General)

(Abstract Algebra and Matrices)

Full Marks : 60

Time : 2½ hours

The figures in the margin indicate full marks
for the questions

Answer either in English or in Assamese

PART—I

(Objective-type)

1. Answer the following questions : 1×7=7

তলত দিয়া প্রশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা :

(a) Define order of an element of a group.

এটা সংঘৰ মৌল এটাৰ মৌলাংকৰ সংজ্ঞা লিখা।

(b) Give an example of a cyclic group of order 4.

4 মৌলাংকৰ চক্ৰীয় সংঘ এটাৰ উদাহৰণ দিয়া।

- (c) Find the cycles of the following permutation :

তলত দিয়া বিন্যাসটোৰ চক্ৰবোৰ নিৰ্ণয় কৰা :

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 4 & 5 & 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

- (d) Give an example of a commutative ring without unity.

এটা একক মৌলবিহীন ক্ৰমবিনিমেয় বলয়ৰ উদাহৰণ দিয়া।

- (e) What is the rank of a null matrix?

বিলুপ্ত মৌলকক্ষ এটাৰ কোটি কিমান?

- (f) When two matrices are said to be conformable for multiplication?

দুটা মৌলকক্ষ কেতিয়া পূৰণৰ উপযোগী বুলি কোৱা হয়?

- (g) When a system of linear homogeneous equation has an infinite number of solutions?

এটা বৈখিক সমঘাত সমীকৰণ প্ৰণালীৰ অসীম সংখ্যক সমাধান কেতিয়া পোৱা যায়?

PART—II

(Very short answer-type)

2. Answer the following questions :

2×4=8

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা :

- (a) Define right coset and left coset of a subgroup of a group.

এটা সংঘৰ উপসংঘৰ সোঁ আৰু বাওঁ সহসংহতিৰ সংজ্ঞা লিখা।

- (b) If $f : G \rightarrow G'$ is a homomorphism, prove that $f(e) = e'$, where e and e' are the identity elements of the groups G and G' respectively.

$f : G \rightarrow G'$ এটা অনুৰূপতা হ'লে, প্ৰমাণ কৰা যে $f(e) = e'$, য'ত e আৰু e' যথাক্ৰমে সংঘ G আৰু G' ব একক মৌল।

- (c) If G is a group, then prove that

$$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}, \forall a, b \in G$$

G এটা সংঘ হ'লে, প্ৰমাণ কৰা যে

$$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}, \forall a, b \in G$$

- (d) Define a symmetric and a skew-symmetric matrix.

সমমিত আৰু বিষম-সমমিত মৌলকক্ষৰ সংজ্ঞা লিখা।

PART—III

(Short answer-type)

3. Answer any *three* questions :

5×3=15

যি কোনো তিনিটা প্রশ্নৰ উত্তৰ কৰা :

- (a) An operation $*$ is defined on the set $\mathbb{Z}$ of integers by

$$a * b = a + b + 1, \forall a, b \in \mathbb{Z}$$

Show that $(\mathbb{Z}, *)$ is an Abelian group.অথবা সংখ্যাৰ সংহতি $\mathbb{Z}$ ত এটা প্ৰক্ৰিয়া $*$ ৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে

$$a * b = a + b + 1, \forall a, b \in \mathbb{Z}$$

দেখুওৱা যে $(\mathbb{Z}, *)$ এটা এবেলীয় সংঘ।

- (b) For elements a, b in a group G , prove that the equation $ax = b$ has unique solution in G .

সংঘৰ G ৰ a, b মৌলৰ বাবে, প্ৰমাণ কৰা যে $ax = b$ সমীকৰণটোৰ G ত অদ্বিতীয় সমাধান পোৱা যায়।

- (c) If A and B are two invertible matrices of same order, then prove that AB is a non-singular matrix and $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

A আৰু B দুটা একে মাত্ৰাৰ প্ৰতিলোমনীয় মৌলকক্ষ হ'লে, প্ৰমাণ কৰা যে AB এটা অনপ্ৰতিম মৌলকক্ষ আৰু $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(d) If A is an n -square matrix, show that $|\text{adj } A| = |A|^{n-1}$.

A এটা n -বর্গ মৌলিক হ'লে, দেখুওৱা যে $|\text{adj } A| = |A|^{n-1}$.

(e) Find the rank of the matrix AB , where

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 6 \\ 5 & 10 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

AB মৌলিকটোৰ কোটি নিৰ্ণয় কৰা, য'ত

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 6 \\ 5 & 10 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

PART—IV

Answer either (a) and (b) or (c) and (d) from each of the following questions :

তলৰ প্ৰতিটো প্ৰশ্নৰ পৰা (a) আৰু (b) অথবা (c) আৰু (d) ৰ উত্তৰ কৰা :

4. (a) Define a subgroup of a group. Show that a non-empty subset H of a group G is a subgroup of G if and only if $ab^{-1} \in H, \forall a, b \in H$. 1+5=6

সংঘৰ উপসংঘৰ সংজ্ঞা দিয়া। দেখুওৱা যে G সংঘৰ অৱিক্ত উপসংহতি H , G ৰ এটা উপসংঘ হ'ব যদি আৰু যদিহে $ab^{-1} \in H, \forall a, b \in H$.

- (b) If H is a subgroup of a group G , prove that $Ha = H \Leftrightarrow a \in H, \forall a \in G$.

সংঘ G ৰ H এটা উপসংঘ হ'লে, প্রমাণ কৰা যে $Ha = H \Leftrightarrow a \in H, \forall a \in G$.

4

- (c) Prove that every quotient group of a cyclic group is cyclic.

প্রমাণ কৰা যে এটা চক্ৰীয় সংঘৰ প্রতিটো ভাগফল সংঘই চক্ৰীয়।

5

- (d) Define kernel of a homomorphism $\phi: G \rightarrow G'$, where G and G' are two groups. Prove that kernel of ϕ is a normal subgroup of G .

1+4=5

G আৰু G' দুটা সংঘ হ'লে, $\phi: G \rightarrow G'$ অনুৰূপতাব মূলাংশৰ সংজ্ঞা দিয়া। প্রমাণ কৰা যে ϕ ৰ মূলাংশ G সংঘৰ নিশ্চৰ উপসংঘ।

5. (a) Let $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$. Show

that M forms a ring under matrix addition and multiplication but not an integral domain.

5+1=6

ধৰা হ'ল $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$. দেখুওৱা

যে M য়ে মৌলকম্পৰ যোগ আৰু পূৰণ প্রক্রিয়া সাপেক্ষে এটা বলয় গঠন কৰে কিন্তু ই এটা পূৰ্ণকীয় ৰাষ্ট্ৰ নহয়।

(b) Prove that in a ring R —

$$(i) \quad (-a)(-b) = ab, \forall a, b \in R;$$

$$(ii) \quad a(b-c) = ab - ac, \forall a, b, c \in R. \quad 2+2=4$$

যি কোনো বলয় R ব বাবে, প্রমাণ করা যে—

$$(i) \quad (-a)(-b) = ab, \forall a, b \in R;$$

$$(ii) \quad a(b-c) = ab - ac, \forall a, b, c \in R.$$

(c) Let R be a ring with unity such that $(xy)^2 = x^2y^2, \forall x, y \in R$. Show that R is a commutative ring. 5

ধরা হ'ল R এটা এককসহ বলয় য'ত $(xy)^2 = x^2y^2, \forall x, y \in R$. দেখুওরা যে R এটা ক্রমবিনিমেয় বলয়।

(d) Prove that a commutative ring R is an integral domain if and only if

$$ab = ac \Rightarrow b = c, \forall a, b, c \in R (a \neq 0) \quad 5$$

প্রমাণ করা যে এটা ক্রমবিনিমেয় বলয় R এটা পূর্ণাঙ্গীয় বাস্তু, যদি আরু যদিহে

$$ab = ac \Rightarrow b = c, \forall a, b, c \in R (a \neq 0)$$

6. (a) If A and B are two n -square matrices, show that

$$\text{adj}(AB) = (\text{adj } B)(\text{adj } A) \quad 5$$

A আরু B দুটা n -বর্গ মৌলিকমাত্র হ'লে, দেখুওরা যে

$$\text{adj}(AB) = (\text{adj } B)(\text{adj } A)$$

- (b) Express the following matrix A as the sum of a symmetric and a skew-symmetric matrix : 5

তলত দিয়া মৌলকক্ষ A ক এটা সমমিত আৰু এটা বিঘম-সমমিত মৌলকক্ষৰ যোগফল হিচাবে প্রকাশ কৰা :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 6 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

- (c) For the matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

find A^{-1} .

5

মৌলকক্ষ $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ ৰ বাবে A^{-1} নির্ণয়

কৰা।

- (d) Solve by matrix method :

5

মৌলকক্ষ পদ্ধতিৰ সহায়ত সমাধান কৰা :

$$x + y + 4z = 6$$

$$3x + 2y - 2z = 9$$

$$5x + y + 2z = 13$$

★ ★ ★