

2014

MATHEMATICS

(General)

(Coordinate Geometry and Vector Analysis)

Full Marks : 80

Time : 3 hours

*The figures in the margin indicate full marks
for the questions*

Answer either in English or in Assamese

PART—I

(Objective-type questions)

1. Answer the following questions : 1×10=10

তলত দিয়া প্রশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা :

- (a) What is the locus represented by the equation $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$?

$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ সমীকৰণটোৱে কি
সম্ভাৱপথ সূচায় ?

- (b) Under what condition will the general equation

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

of the second degree represents a circle?

কি চৰ্তত

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

সাধাৰণ দ্বিঘাত সমীকৰণটোৱে এটা বৃত্ত বুজাব ?

- (c) If the lines $y = mx$ and $y = m'x$ are conjugate diameters of the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, then write down the value of mm' .

যদি $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তৰ $y = mx$ আৰু $y = m'x$

দুডাল সংযুক্ত ব্যাস হয়, তেন্তে mm' ৰ মান লিখা।

- (d) Write down the parametric form of the equation of the circle $x^2 + y^2 = a^2$.

$x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তৰ সমীকৰণটোক প্ৰাচলিক ধৰণত লিখা।

- (e) What is the general equation of a plane parallel to x -axis?

x -অক্ষৰ সমান্তৰাল হোৱা সাধাৰণ সমতলৰ সমীকৰণ কি?

- (f) Write down the centre and radius of the sphere given by the equation

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$$

সমীকৰণৰ গোলকটোৰ কেন্দ্ৰ আৰু ব্যাসার্ধ লিখা।

- (g) Write down the equation of the x -axis in symmetrical form.

সমমিত (symmetrical) আকাৰত x -অক্ষৰ সমীকৰণটো লিখা।

- (h) If \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} are coplanar vectors, then
 $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = ?$

যদি \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} তিনিটা সমতলীয় ভেক্টৰ হয়, তেন্তে
 $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = ?$

(i) Choose the correct answer :

শুদ্ধ উত্তৰটো লিখা :

If (যদি) $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, then (তেন্তে) curl is

(i) 1

(ii) 0

(iii) 3

(iv) -3

(j) What is the unit tangent vector to the curve at the point P whose position vector with respect to the origin is \vec{r} ?

এটা বক্রৰ ওপৰত কোনো মূলবিন্দু সাপেক্ষে \vec{r} অবস্থান ভেক্টৰযুক্ত P বিন্দুত একক স্পৰ্শক ভেক্টৰটো কি ?

PART—II

(Very short answer-type questions)

2. Answer the following questions : 2×5=10

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা :

(a) If the two pairs of lines

$$x^2 - 2pxy - y^2 = 0 \text{ and } x^2 - 2qxy - y^2 = 0$$

be such that each pair bisects the angle between the other pair, prove that $pq + 1 = 0$.

যদি

$$x^2 - 2pxy - y^2 = 0 \text{ আৰু } x^2 - 2qxy - y^2 = 0$$

সবলৰেখা দুযোৰৰ প্ৰতি যোৰেই আনযোৰৰ মাজৰ কোণৰ সমদ্বিখণ্ডক হয়, প্ৰমাণ কৰা যে $pq + 1 = 0$.

(b) Find the vertex and focus of the parabola $4y^2 - 20x - 8y + 39 = 0$.

$4y^2 - 20x - 8y + 39 = 0$ অধিবৃত্তটোৰ শীৰ্ষবিন্দু আৰু নাভি উলিওৱা।

(c) Define pole and polar of a conic.

এটা শঙ্কৰৰ ধ্ৰুৱবিন্দু আৰু ধ্ৰুৱীয়ৰেখাৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(d) Obtain the equation of a cone with its vertex at the origin and passing through the curve $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$, $lx + my + nz = p$.

মূলবিন্দু শীৰ্ষবিন্দুৱিশিষ্ট আৰু $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$, $lx + my + nz = p$ বক্ৰৰ মাজেদি যোৱা শঙ্কুটোৰ সমীকৰণ উলিওৱা।

(e) Prove that

প্ৰমাণ কৰা যে

$$\frac{d}{dt} \left\{ \vec{r} \cdot \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right) \right\} = \left[\vec{r} \frac{d\vec{r}}{dt} \frac{d^3\vec{r}}{dt^3} \right]$$

PART—III

(Short answer-type questions)

3. Answer any four questions of the following :

5×4=20

তলৰ যি কোনো চাৰিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰা :

- (a) If by a rotation of the rectangular axes about the origin, the expression $ax^2 + 2hxy + by^2$ changes to $a'x'^2 + 2h'x'y' + b'y'^2$, then prove that $a + b = a' + b'$ and $ab - h^2 = a'b' - h'^2$. 5

আয়তীয় অক্ষদ্বয়ক মূলবিন্দু সাপেক্ষে ঘূৰালে যদি $ax^2 + 2hxy + by^2$ বাৰিটো $a'x'^2 + 2h'x'y' + b'y'^2$ লৈ ৰূপান্তৰিত হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে, $a + b = a' + b'$ আৰু $ab - h^2 = a'b' - h'^2$.

- (b) Find the polar equation of the conic in the following form : 5

তলত দিয়া আকাৰত শঙ্কৰৰ ধ্ৰুৱীয় সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা :

$$\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$$

- (c) Find the shortest distance between the following lines : 5

তলৰ বেখাযোৰৰ মাজৰ হ্রস্বতম দূৰত্ব নিৰ্ণয় কৰা :

$$\frac{x - \alpha}{l} = \frac{y - \beta}{m} = \frac{z - \gamma}{n}$$

$$\frac{x - \alpha'}{l'} = \frac{y - \beta'}{m'} = \frac{z - \gamma'}{n'}$$

- (d) Find the equation of the right circular cylinder whose axis is the line $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{6}$ and radius equal to 5. 5

এটা সমচক্ৰীয় বেলনৰ অক্ষৰ সমীকৰণ $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{6}$

আৰু ব্যাসার্ধ 5 হ'লে, সমীকৰণটো উলিওৱা।

- (e) (i) If

$$\nabla = (x^2 + yz)\hat{i} + (y^2 + zx)\hat{j} + (z^2 + xy)\hat{k}$$

find its curl at the point (1, 2, 3). 3

যদি

$$\nabla = (x^2 + yz)\hat{i} + (y^2 + zx)\hat{j} + (z^2 + xy)\hat{k}$$

হয়, (1, 2, 3) বিন্দুত ইয়াৰ কৰল (curl)

উলিওৱা।

(ii) If $\vec{p} = \vec{b} \times \vec{c}$ and $\vec{q} = \vec{c} \times \vec{a}$, then prove that $\vec{p} \times \vec{q}$ is parallel to \vec{c} . 2

যদি $\vec{p} = \vec{b} \times \vec{c}$ আৰু $\vec{q} = \vec{c} \times \vec{a}$ হয়, তেন্তে প্রমাণ কৰা যে $\vec{p} \times \vec{q}$ ভেক্টৰটো \vec{c} ৰ সমান্তৰাল।

(f) (i) Show that (দেখুওৱা যে)

$$[\vec{a} \times \vec{b} \quad \vec{b} \times \vec{c} \quad \vec{c} \times \vec{a}] = [\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}]^2 \quad 3$$

(ii) If $\vec{r} = \vec{a} \cos \omega t + \vec{b} \sin \omega t$, prove that

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \omega^2 \vec{r} = 0, \text{ where } \vec{a} \text{ and } \vec{b} \text{ are}$$

constant vectors and ω is a constant. 2

যদি $\vec{r} = \vec{a} \cos \omega t + \vec{b} \sin \omega t$, প্রমাণ কৰা

$$\text{যে } \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \omega^2 \vec{r} = 0, \text{ য'ত } \vec{a} \text{ আৰু } \vec{b} \text{ ধ্ৰুৱক}$$

ভেক্টৰ আৰু ω এটা ধ্ৰুৱক।

PART—IV

(Essay-type questions)

Answer either (a) or (b) from each of the following questions :

10×4=40

তলৰ প্ৰতিটো প্ৰশ্নৰ পৰা (a) অথবা (b) ৰ উত্তৰ কৰা :

4. (a) (i) If the equation

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

represents a pair of parallel straight

lines, show that $\frac{a}{h} = \frac{h}{b} = \frac{g}{f}$.

5

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

সমীকৰণে এযোৰ সমান্তৰাল সৰলৰেখাক বুজালে

দেখুওৱা যে $\frac{a}{h} = \frac{h}{b} = \frac{g}{f}$.

(ii) When are two circles said to be orthogonal? Prove that the two circles $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 20 = 0$ and $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 10 = 0$ cut orthogonally.

5

দুটা বৃত্তক কেতিয়া অভিলম্বীয় বোলা হয়? প্ৰমাণ

কৰা যে $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 20 = 0$

আৰু $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 10 = 0$ বৃত্ত

দুটাই অভিলম্বীয়কৈ কটাকটি কৰে।

(b) (i) Show that the equation

$$2x^2 + 7xy + 3y^2 + 8x + 14y + 8 = 0$$

represents two straight lines and find the angle between them. 5

$$2x^2 + 7xy + 3y^2 + 8x + 14y + 8 = 0$$

সমীকৰণে এযোৰ সৰলৰেখাক নিৰ্দেশ কৰে। ৰেখা দুডালৰ মাজৰ কোণটো নিৰ্ণয় কৰা।

(ii) If the line $3x - 2y = 18$ be a tangent to the circle

$$x^2 + y^2 + 5x + 6y - 14 = 0$$

find the point of contact. 5

যদি $3x - 2y = 18$ ৰেখাডাল

$$x^2 + y^2 + 5x + 6y - 14 = 0$$

বৃত্তৰ এডাল স্পৰ্শক, স্পৰ্শবিন্দুটো নিৰ্ণয় কৰা।

5. (a) (i) Show that the lengths of the semi-axes of the conic

$$ax^2 + 2hxy + ay^2 = d \text{ are } \frac{d}{\sqrt{a+h}} \text{ and}$$

$$\frac{d}{\sqrt{a-h}}$$

4

$$ax^2 + 2hxy + ay^2 = d \text{ শাক্তৰ অৰ্ধ-}$$

অক্ষদ্বয়ৰ দৈৰ্ঘ্য $\frac{d}{\sqrt{a+h}}$ আৰু $\frac{d}{\sqrt{a-h}}$ বুলি

দেখুওৱা।

- (ii) If l and l' are the lengths of the two segments of a focal chord, prove that

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{l'} = \frac{1}{a}$$

where $(a, 0)$ is the focus of the conic. 3

কোনো এডাল নাভি-জ্যাব অংশ দুটা l আৰু l' হ'লে, প্রমাণ কৰা যে

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{l'} = \frac{1}{a}$$

য'ত $(a, 0)$ হ'ল শংকুৰ নাভি।

- (iii) Find the condition that the line $lx + my = n$ touches the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. 3

$$lx + my = n \quad \text{বেখাডালে} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

উপবৃত্তক স্পর্শ কৰাৰ চৰ্তটো উলিওৱা।

- (b) (i) If e and e' be the eccentricities of a hyperbola and its conjugate, show that $\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e'^2} = 1$. 4

সংযুগ্ম পৰাবৃত্ত এযোৰৰ উৎকেন্দ্ৰতা e আৰু e' হ'লে, প্রমাণ কৰা যে $\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e'^2} = 1$.

- (ii) If $(at_1^2, 2at_1)$ and $(at_2^2, 2at_2)$ are the two end-points of a focal chord of the parabola $y^2 = 4ax$, prove that $t_1 t_2 = -1$. 3

$y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তৰ নাভিলম্বীয় জ্যা এডালৰ দুই মূৰৰ বিন্দু দুটাৰ স্থানাংক $(at_1^2, 2at_1)$ আৰু $(at_2^2, 2at_2)$ হ'লে, প্রমাণ কৰা $t_1 t_2 = -1$.

- (iii) Prove that the lines $4x - 3y + 40 = 0$ and $x + 3y - 7 = 0$ are parallel to a pair of conjugate diameters of the ellipse $4x^2 + 9y^2 = 36$. 3

প্রমাণ কৰা যে

$$4x - 3y + 40 = 0 \text{ আৰু } x + 3y - 7 = 0$$

ৰেখাদুডাল $4x^2 + 9y^2 = 36$ উপবৃত্তৰ দুডাল সংযুগ্ম ব্যাসৰ সমান্তৰাল।

6. (a) (i) Find the centre and radius of the following circle : 5

তলৰ বৃত্তটোৰ কেন্দ্ৰ আৰু ব্যাসার্ধ নিৰ্ণয় কৰা :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y + 8z = 45;$$

$$x - 2y + 2z = 18$$

- (ii) Prove that every homogeneous equation represents a cone with vertex at the origin. 5

প্রমাণ কৰা যে এটা সুৰম সমীকৰণে মূলবিন্দু শীৰ্ষবিন্দু বিশিষ্ট কোনো শংকু নিকাৰণ কৰে।

- (b) (i) A plane passes through a fixed point (α, β, γ) and cuts the coordinate axes in A, B, C . Prove that the locus of the centre of the sphere $OABC$ is given by

$$\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{y} + \frac{\gamma}{z} = 2$$

5

এখন সমতল এটা নিৰ্দিষ্ট বিন্দু (α, β, γ) ৰে যায় আৰু অক্ষত্ৰয়ক A, B, C বিন্দুত ছেদ কৰে।
প্রমাণ কৰা যে $OABC$ গোলকৰ কেন্দ্ৰৰ সঞ্চাৰপথ

$$\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{y} + \frac{\gamma}{z} = 2$$

- (ii) Find the equation of the cone whose vertex is (α, β, γ) and guiding curve is $z = 0, ax^2 + by^2 = 1$. 5

এটা শংকুৰ সমীকৰণ উলিওৱা, য'ত শংকুৰ শীৰ্ষবিন্দুৰ স্থানাঙ্ক (α, β, γ) আৰু নিৰ্দেশক বক্ৰৰ সমীকৰণ $z = 0, ax^2 + by^2 = 1$.

7. (a) (i) Prove that (প্রমাণ কৰা যে)

$$[\vec{a} \vec{b} \vec{c}][\vec{p} \vec{q} \vec{r}] = \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{p} & \vec{a} \cdot \vec{q} & \vec{a} \cdot \vec{r} \\ \vec{b} \cdot \vec{p} & \vec{b} \cdot \vec{q} & \vec{b} \cdot \vec{r} \\ \vec{c} \cdot \vec{p} & \vec{c} \cdot \vec{q} & \vec{c} \cdot \vec{r} \end{vmatrix}$$

5

(ii) A particle is moving along the curve $x = t^3 + 1$, $y = t^2$ and $z = 2t + 5$, where t is the time. Find the components of its velocity and acceleration at $t = 1$ in the direction of $\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$.

5

এটা বস্তুকণাই $x = t^3 + 1$, $y = t^2$ আৰু $z = 2t + 5$ বক্রত গতি কৰি আছে, য'ত $t =$ সময়। $\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ ৰ দিশত ইয়াৰ বেগ আৰু ত্বৰণৰ উপাংশ নিৰ্ণয় কৰা, যেতিয়া $t = 1$.

(b) (i) Show that the necessary and sufficient condition for a scalar point function $f(x, y, z)$ to be constant is that $\Delta s = 0$.

5

দেখুওৱা যে $f(x, y, z)$ আধাৰত স্কেলাৰ বিন্দু ফলনত ধ্ৰুৱ হ'বলৈ প্ৰয়োজনীয় আৰু পৰ্যাপ্ত চৰ্ত হ'ল $\Delta s = 0$.

(ii) If

$$\vec{f} = x^2y\hat{i} - 2zx + zx\hat{j} + 2yz\hat{k}$$

find—

(1) $\text{div } \vec{f}$

(2) $\text{curl } \vec{f}$

2+3

যদি

$$\vec{f} = x^2y\hat{i} - 2zx + zx\hat{j} + 2yz\hat{k}$$

তেজে

(1) $\text{div } \vec{f}$

(2) $\text{curl } \vec{f}$

উলিওৱা।
