

20 17

MATHEMATICS

(General)

Paper : 6.2

(Advanced Calculus)

Full Marks : 80

Time : 3 hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions

Answer either in English or in Assamese

1. Answer the following questions : $1 \times 10 = 10$

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) Define a bounded metric space.

এটা পৰিবিদ্ধ দূৰীক স্থানৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(b) What is closed set?

বন্ধ সংহতি কাক বোলে?

(c) What is the value of $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$?

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ ৰ মান কি?

(d) Define Cauchy sequence.

কছি অনুক্রমৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(e) Find the limit point of the following set :

তলৰ সংহতিটোৰ সীমা বিন্দু নিৰ্ণয় কৰা :

$$\left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}$$

(f) What are equivalent metrics?

সমতুল্য দূৰীক স্থান কাক বোলে?

(g) What is the value of $\Gamma(0)$?

$\Gamma(0)$ ৰ মান কি?

(h) Define improper integral.

অপ্রকৃত অনুকলনৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(i) Give the definition of open sphere.

মুক্ত গোলকৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(j) For what values of m and n , the Beta function

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx$$

is convergent?

m আৰু n ৰ কি কি মানৰ বাবে

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx$$

বিটা ফলনটো অভিসাৰী হ'ব?

2. Answer the following questions : 2×5=10

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) Define metric space.

দূৰীক স্থানৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(b) If $f(x)$ be defined on $[0, 2]$ as

$$f(x) = x + x^2, \text{ when } x \text{ is rational}$$

$$= x^2 + x^3, \text{ when } x \text{ is irrational}$$

evaluate the upper and lower Riemann integrals of f over $[0, 2]$.

$[0, 2]$ অন্তৰালত $f(x)$ ক সংজ্ঞাবদ্ধ কৰা হৈছে এনেদৰে

$$f(x) = x + x^2, \text{ য'ত } x \text{ পৰিমেয়}$$

$$= x^2 + x^3, \text{ য'ত } x \text{ অপৰিমেয়}$$

f ৰ $[0, 2]$ অন্তৰালত উৰ্ধ্ব আৰু নিম্ন বিমান অনুকলন নিৰ্ণয় কৰা।

(c) Examine the convergence of

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^2)^{1/2}}$$

$\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^2)^{1/2}}$ ৰ অভিসাৰিতা পৰীক্ষা কৰা।

(d) Show that (দেখুওৱা যে)

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$$

(e) Give an example of a Riemann integrable function on $[a, b]$ which is not monotonic.

$[a, b]$ অন্তৰালত একদিষ্ট নোহোৱা বিমান অনুকলনীয় ফলনৰ এটা উদাহৰণ দিয়া।

3. Solve any four :

5×4=20

যি কোনো চাৰিটাৰ সমাধান কৰা :

(a) If f is monotonic in $[a, b]$, then f is R -integrable in $[a, b]$.

যদি f ফলনটো $[a, b]$ অন্তৰালত একদিষ্ট হয়, তেন্তে f ফলনটো $[a, b]$ অন্তৰালত R -অনুকলনীয় হ'ব।

(b) Let R^2 be the set of all ordered pairs of real numbers and let $d : R^2 \times R^2 \rightarrow R$ be defined by

$$d(x, y) = \{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2\}^{1/2}$$

where $x = (x_1, x_2)$ and $y = (y_1, y_2)$. Show that (R^2, d) is a metric space.

R^2 সংহতিটো সকলো বাস্তৱ সংখ্যাৰ ক্ৰমিক যোৰৰ সংহতি আৰু $d : R^2 \times R^2 \rightarrow R$ ক সংজ্ঞাবদ্ধ কৰা হৈছে

$$d(x, y) = \{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2\}^{1/2}$$

ধৰণে, য'ত $x = (x_1, x_2)$ আৰু $y = (y_1, y_2)$. দেখুওৱা যে (R^2, d) এটা দূৰীক স্থান।

(c) Prove that every convergent sequence is a Cauchy sequence.

প্ৰমাণ কৰা যে প্ৰত্যেকটো অভিসাৰী অনুক্ৰম এটা কছি অনুক্ৰম।

(d) Evaluate

$$\iint x^{1/2} y^{1/2} (1-x-y)^{1/4} dx dy$$

over the interior of the triangle bounded by the lines $x=0$, $y=0$ and $x+y=1$.

$x=0$, $y=0$ আৰু $x+y=1$ বেখাৰে পৰিবেদ্ধ ত্ৰিভুজটোৰ অন্তৰ্ভাগত

$$\iint x^{1/2} y^{1/2} (1-x-y)^{1/4} dx dy$$

মান নিৰ্ণয় কৰা।

(e) Show that the real line is a complete metric space.

দেখুওৱা যে বাস্তৱ বেখাজাল এটা পূৰ্ণ দূৰীক স্থান।

(f) If f is defined on $[0, a]$, $a > 0$ by

$$f(x) = x^2 \quad \forall x \in [0, a]$$

then prove that f is Riemann integrable on $[0, a]$ and

$$\int_0^a f(x) dx = \frac{a^3}{3}$$

f ক $[0, a]$, $a > 0$ অন্তৰালত এনেভাৱে সংজ্ঞাবদ্ধ কৰা হৈছে যাতে

$$f(x) = x^2 \quad \forall x \in [0, a]$$

তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে f টো $[0, a]$ অন্তৰালত বিমান অনুকলনীয় আৰু

$$\int_0^a f(x) dx = \frac{a^3}{3}$$

4. Answer [(a) or (b)], [(c) or (d)], [(e) or (f)] and [(g) or (h)] : 10×4=40
 [(a) বা (b)], [(c) বা (d)], [(e) বা (f)] আৰু [(g) বা (h)] ব
 উত্তৰ কৰা :

- (a) Let (X, d) be a metric space and ρ be a function on $X \times X$, defined by

$$\rho(x, y) = \min \{1, d(x, y)\} \quad \forall x, y \in X$$

Show that—

- (i) (X, ρ) is a bounded metric space;
 (ii) ρ is equivalent to d .

(X, d) এটা দূৰীক স্থান আৰু $X \times X$ ত ρ ফলনটো সংজ্ঞাবদ্ধ কৰা হৈছে এনেধৰণে

$$\rho(x, y) = \min \{1, d(x, y)\} \quad \forall x, y \in X$$

দেখুওৱা যে—

- (i) (X, ρ) এটা পবিত্ৰ দূৰীক স্থান;
 (ii) ρ আৰু d সমতুল্য।
 (b) Show that

$$\int_0^{\pi/2} \sin \log \sin x \, dx$$

is convergent with the value $\log^{(2/e)}$.

দেখুওৱা যে

$$\int_0^{\pi/2} \sin \log \sin x \, dx$$

অভিসাৰী আৰু ইয়াৰ মান $\log^{(2/e)}$.

(c) Show that

$$\iint_G (x^2 - y^2) dx dy = \frac{4}{45}$$

where G is the triangle bounded by the lines $y=0$, $x=1$ and $x-y=0$.

দেখুওবা যে

$$\iint_G (x^2 - y^2) dx dy = \frac{4}{45}$$

য'ত G ত্ৰিভুজটো $y=0$, $x=1$ আৰু $x-y=0$ ৰে সীমিত।

(d) Prove that (প্রমাণ কৰা যে)

$$\beta(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

(e) Test the convergence of the integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$$

অভিসাৰিতাৰ পৰীক্ষা কৰা :

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$$

(f) Evaluate

$$\iiint_T \log(x+y+z) dx dy dz$$

where T denotes the region bounded by $x=0$, $y=0$, $z=0$ and $x+y+z=1$.

মান নির্ণয় কৰা :

$$\iiint_T \log(x+y+z) dx dy dz$$

য'ত T , $x=0$, $y=0$, $z=0$ আৰু $x+y+z=1$ দ্বাৰা সীমিত।

(g) Test the convergence of

$$\int_a^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} \sin x dx, a > 0$$

using Dirichlet's test.

দিৰিচ্লেটৰ পৰীক্ষাৰ দ্বাৰা

$$\int_a^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} \sin x dx, a > 0$$

অভিসাৰিতা পৰীক্ষা কৰা।

(h) Compute the volume of

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ ৰ আয়তন নির্ণয় কৰা।}$$
