

### 3 (Sem-3) MAT

2019

## MATHEMATICS

( General )

( Calculus : Methods and Applications )

Full Marks : 80

Time : 3 hours

*The figures in the margin indicate full marks for the questions*

*Answer either in English or in Assamese*

1. Answer the following questions : 1×10=10

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) What is the  $n$ -th derivative of  $y = e^{ax+b}$ ?

$y = e^{ax+b}$  ৰ  $n$ -তম অৱকলন কি?

(b) What is the solution of the differential equation?

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4$$

অৱকলনীয় সমীকৰণ  $\frac{d^2y}{dx^2} = 4$  ৰ সমাধানটো কি?

( 2 )

(c) Write the reduction formula for  $\int \sin^n x dx$ .

$\int \sin^n x dx$  ৰ লঘুকৰণ সূত্রটো লিখা।

(d) Is the sum of two continuous functions also continuous?

দুটা অবিচ্ছিন্ন ফলনৰ যোগফলটো অবিচ্ছিন্ন নে?

(e) What is the value of  $\int_{-\pi}^{\pi} f(\cos x) dx$ ?

$\int_{-\pi}^{\pi} f(\cos x) dx$  ৰ মান কি?

(f) Write down the Taylor's infinite series for a function.

এটা ফলনৰ টেইলৰ অসীম শ্ৰেণীটো লিখা।

(g) Write down the Leibnitz's theorem.

লেবনিজৰ উপপাদ্যটো লিখা।

( 3 )

(h) Find the value of

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$  ৰ মান নির্ণয় কৰা।

(i) What do you mean by homogeneous functions?

সুষম ফলন বুলিলে তুমি কি বুজা?

(j) Find the differential equation for  $y = 2x + 1$ .

$y = 2x + 1$  ৰ বাবে অৱকলনীয় সমীকৰণটো নির্ণয় কৰা।

2. Answer the following questions : 2×5=10

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) Find the asymptotes parallel to  $x$ -axis of the curve  $x^2y^2 - a^2(x^2 + y^2) = 0$ .

বক্ৰ  $x^2y^2 - a^2(x^2 + y^2) = 0$ ,  $x$ -অক্ষৰ সমান্তৰাল অনন্তস্পৰ্শক নির্ণয় কৰা।

( 4 )

(b) Evaluate :

মান উলিওৱা :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^6 x \cos^3 x \, dx$$

(c) Find the  $n$ -th derivative of  $y = \log(ax + b)$ .

$y = \log(ax + b)$  ৰ  $n$ -তম অৱকলজটো নিৰ্ণয় কৰা।

(d) Find the degree and order of the differential equation

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 5x \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 = x^2$$

অৱকলনীয় সমীকৰণ

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 5x \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 = x^2$$

-ৰ ঘাত আৰু ক্ৰম নিৰ্ণয় কৰা।

(e) State the Lagrange's mean value theorem.

লাগ্ৰাঞ্জৰ মধ্যমমানৰ উপপাদ্যটো বৰ্ণনা কৰা।

20A/77

( Continued )

( 5 )

3. Answer any four questions of the following :

5×4=20

তলৰ যি কোনো চাৰিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰা :

(a) State and prove Euler's theorem for two variables.

দুটা চলকবিশিষ্ট আইলাৰ সূত্ৰটো লিখা আৰু প্ৰমাণ কৰা।

(b) Find the maximum and minimum values of  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9$ .

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9$  ৰ গৰিষ্ঠ আৰু লঘিষ্ঠ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(c) If (যদি)  $y = \sin^{-1} x$ , prove that (প্ৰমাণ কৰা যে)

(i)  $(1 - x^2)y_2 - xy_1 = 0$

(ii)  $(1 - x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - n^2y_n = 0$

(d) Find the radius of curvature at the point

$$x = \frac{\pi}{2}$$

of the curve  $y = 4 \sin x - \sin 2x$ .

$y = 4 \sin x - \sin 2x$  বক্ৰৰ,  $x = \frac{\pi}{2}$  বিন্দুত বক্ৰতাৰ ব্যাসাৰ্ধ নিৰ্ণয় কৰা।

20A/77

( Turn Over )

(e) Solve :

সমাধান কৰা :

(i)  $(D^2 + 4)y = x^2$

Or / অথবা

(ii)  $(D^2 + 6D + 5)y = 16e^{3x}$

(f) If a particle is moving along a line such that its acceleration is equal to the displacement of the particle at any time, then find its velocity and displacement at that time.

যদি এটা কণাই এডাল ৰেখাত এনেদৰে গতি কৰিছে যাতে ইয়াৰ ত্বৰণ যি কোনো সময়ত কণাটোৰ স্থান পৰিবৰ্তনৰ সমান হয়, তেন্তে কণাটোৰ সেই সময়ত বেগ আৰু স্থান নিৰ্ধাৰণ কৰা।

4. Answer any four questions from the following :

10×4=40

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ পৰা যি কোনো চাৰিটাৰ উত্তৰ কৰা :

(a) (i) If  $y = \tan^{-1} x$ , then prove by using Leibnitz's theorem

$$(1 + x^2)y_{n+2} + 2(n+1)xy_{n+1} + n(n+1)y_n = 0$$

যদি  $y = \tan^{-1} x$ , তেন্তে লেবনিজৰ উপপাদ্যটো ব্যৱহাৰ কৰি প্ৰমাণ কৰা যে

$$(1 + x^2)y_{n+2} + 2(n+1)xy_{n+1} + n(n+1)y_n = 0$$

(ii) Verify Cauchy's mean value theorem for the functions  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = x^3$  over  $[1, 2]$ .

$[1, 2]$  ত,  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = x^3$  ফলন-কেইটাৰ কচিৰ মধ্যমমানৰ উপপাদ্যটো পৰীক্ষা কৰা।

(b) (i) Prove that

প্ৰমাণ কৰা যে

$$\frac{x}{1+x^2} < \tan^{-1} x < x, \quad x > 0$$

(ii) If

$$u = \sin^{-1} \frac{x^2 + y^2}{x+y}$$

then prove that

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \tan u$$

যদি

$$u = \sin^{-1} \frac{x^2 + y^2}{x+y}$$

তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \tan u$$

( 8 )

- (c) (i) Examine the continuity at  $x=0$  for the function

$$f(x) = x \cos \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$$
$$= 0, \quad x = 0$$

$x=0$  বিন্দুত ফলনটো অবিচ্ছিন্নতা পরীক্ষা কৰা

$$f(x) = x \cos \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$$
$$= 0, \quad x = 0$$

- (ii) Find the equation of tangent at point  $(x, y)$  of the curve  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ .

$(x, y)$  বিন্দুত  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$  বক্ৰৰ স্পৰ্শকৰ সমীকৰণটো নিৰ্ণয় কৰা।

- (d) (i) Find the radius of curvature of the curve  $x^2 = 4y$  at the vertex.

শীৰ্ষ বিন্দুত  $x^2 = 4y$  বক্ৰৰ, বক্ৰতাৰ ব্যাসার্ধ নিৰ্ণয় কৰা।

- (ii) Find the asymptotes parallel to the axes of the curve

$$x^2y - 3x^2 - 4y + 2 = 0$$

$x^2y - 3x^2 - 4y + 2 = 0$  বক্ৰৰ অক্ষৰ সমান্তৰাল অনন্তস্পৰ্শক নিৰ্ণয় কৰা।

( 9 )

- (e) (i) Find the reduction formula for

$$\int \sin^m x \cos^n x dx$$

$\int \sin^m x \cos^n x dx$  ৰ লঘুকৰণ সূত্রটো উলিওৱা।

- (ii) Prove that (প্রমাণ কৰা যে)

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx,$$

( $a < c < b$ )

- (f) (i) Find the area of the circle  $x^2 + y^2 = a^2$ .

$x^2 + y^2 = a^2$  বৃত্তৰ কালি উলিওৱা।

- (ii) Solve :

সমাধান কৰা :

$$(D^2 - 2D + 4) y = e^x \cos x$$

Or / অথবা

$$(D^2 - 4D + 4) y = x^3 e^{2x}$$

( 10 )

(g) (i) Solve :

সমাধান করা :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = \sin 2x$$

Or / অথবা

$$x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + 2x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + y = 0$$

(ii) Find the differential equation by eliminating constants  $a$ ,  $b$  from  $y = ax + bx^2$ .

$y = ax + bx^2$  ব পৰা ধ্রুবক  $a$ ,  $b$  অপনয়ন কৰি  
অৱকলনীয় সমীকৰণটো নিৰ্ণয় কৰা।

(h) Solve (any two) :

সমাধান করা (যি কোনো দুটা) :

(i)  $x \frac{dy}{dx} + y = x^3$

(ii)  $(x^2 - y^2) dx + xy dy = 0$

( 11 )

(iii)  $y(2xy + e^x) dx = e^x dy$

(iv)  $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+1}{x+y-1}$

\*\*\*