

2018

MATHEMATICS

(General)

(Calculus : Methods and Applications)

Full Marks : 80

Time : 3 hours

*The figures in the margin indicate full marks
for the questions*

Answer either in English or in Assamese

1. Answer the following questions : 1×10=10

তলত দিয়া প্রশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) What is the n th derivative of x^m ?

x^m ৰ n তম অৱকলজ কি?

(b) Write down the Maclaurin's expansion of $\cos x$.

$\cos x$ ৰ মেৰু'বিনৰ বিস্তৃতিটো লিখা।

(c) "Every differentiable function of two variables is continuous." Is it true?

“দুটা চলক বিশিষ্ট সকলো অৱকলনীয় ফলন অবিচ্ছিন্ন হয়।” সচানে?

(d) Define an asymptote for a curve.

এটা বক্ৰৰ অনন্তস্পৰ্শকৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(e) Find the value of $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x dx$.

$\int_0^{\pi/2} \cos^3 x dx$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(f) Find the integrating factor of $xdy - ydx$.

$xdy - ydx$ ৰ অনুকল উৎপাদকটো নিৰ্ণয় কৰা।

(g) Define the order and degree of a differential equation.

এটা অৱকল সমীকৰণৰ ক্ৰম আৰু ঘাতৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(h) Write down the reduction formula for $\int \tan^n x dx$.

$\int \tan^n x dx$ ৰ লঘুকৰণ সূত্ৰটো লিখা।

(i) State the Euler's theorem on homogeneous function for two variables.

দুটা চলক বিশিষ্ট সমসত্ত্ব ফলনৰ অয়েলাৰ উপপাদ্যটো লিখা।

(3)

(j) Give an example of a linear differential equation of order 3.

3 ক্ৰমৰ এটা বৈখিক অৱকল সমীকৰণৰ উদাহৰণ দিয়া ।

2. Answer the following questions : 2×5=10

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) Find the n th derivative of $y = \frac{1}{ax+b}$.

$y = \frac{1}{ax+b}$ ৰ n তম অৱকলজ নিৰ্ণয় কৰা ।

(b) State the Cauchy's mean value theorem.

কোচিৰ মধ্যমানৰ উপপাদ্যটো লিখা ।

(c) Find all the asymptotes of the curve $4x - xy - 3y = 0$, parallel to the axes.

বক্ৰ $4x - xy - 3y = 0$ ৰ অক্ষৰ সমান্তৰাল সকলোবোৰ অনন্তস্পৰ্শক নিৰ্ণয় কৰা ।

(d) Find the degree and order of the differential equation :

অৱকল সমীকৰণটোৰ ঘাত আৰু ক্ৰম নিৰ্ণয় কৰা :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2-y^2}}$$

(4)

(e) Solve :

সমাধান কৰা :

$$(D^4 + 2D^2 + 1)y = 0$$

3. Answer any four questions of the following :

5×4=20

তলৰ যি কোনো চাৰিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰা :

(a) State and prove Leibniz's theorem.

লিৰনিজৰ উপপাদ্যটো লিখা আৰু প্ৰমাণ কৰা ।

(b) If $u = \tan^{-1} \frac{x^3 + y^3}{x - y}$, $x \neq y$, then show that

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \sin 2u$$

যদি $u = \tan^{-1} \frac{x^3 + y^3}{x - y}$, $x \neq y$, তেন্তে দেখুওৱা যে

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \sin 2u$$

(c) If ρ be the radius of curvature of the curve $y = f(x)$, then prove that

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

(5)

যদি $y = f(x)$ বক্রব বক্রতা ব্যাসার্ধ ρ হয়, তেজ্জে প্রমাণ
কৰা যে

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

(d) If $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x dx$, then prove that

$$I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1}$$

and deduce the value of I_5 .

যদি $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x dx$, তেজ্জে প্রমাণ কৰা যে

$$I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1}$$

আৰু ইয়াৰ পৰা I_5 ৰ মান উলিওৱা।

(e) Find the length of the astroid

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

এষ্টৰইড $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ ৰ দৈৰ্ঘ্য নিৰ্ণয় কৰা।

- (f) Form the differential equation for the curve $y = ax + bx^2$, where a and b are arbitrary constants.

বক্র $y = ax + bx^2$ ৰ বাবে অৱকল সমীকৰণটো গঠন কৰা, য'ত a আৰু b স্বেচ্ছ প্ৰৱৰ্তক।

4. Answer any four questions of the following :

10×4=40

তলৰ যি কোনো চাৰিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰা :

- (a) (i) Show that the differential equation

$$(y^4 + 4x^3y + 3x)dx +$$

$$(x^4 + 4xy^3 + y + 1)dy = 0$$

is exact and hence solve it.

$$(y^4 + 4x^3y + 3x)dx +$$

$$(x^4 + 4xy^3 + y + 1)dy = 0$$

অৱকল সমীকৰণটো যথার্থ বুলি দেখুৱাই সমাধান কৰা।

- (ii) Solve :

সমাধান কৰা :

$$x \frac{dy}{dx} + 2y = x^2 \log x$$

(7)

Or / অথবা

Solve :

সমাধান কৰা :

$$\frac{dy}{dx} - 2y \cos x = -2 \sin 2x$$

(b) Solve any two of the following :

তলৰ যি কোনো দুটা সমাধান কৰা :

(i) $(D^2 + 4D + 3)y = e^{-3x}$

(ii) $(D^2 - 1)y = x^2 \cos x$

(iii) $(D^3 + D^2 + D + 1)y = \sin 2x$

(iv) $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + y = 3x^2$

(c) State and prove the Rolle's theorem. By using Rolle's theorem, verify for the function $f(x) = x^2$ in the interval $[-1, 1]$.

ৰ'লৰ উপপাদ্যটো লিখা আৰু প্ৰমাণ কৰা। ৰ'লৰ উপপাদ্যটো ব্যৱহাৰ কৰি $[-1, 1]$ অন্তৰালত $f(x) = x^2$ ফলনটো প্ৰতিপন্ন কৰা।

- (d) (i) Find the equations of tangent and normal at any point (x, y) of the curve

$$\frac{x^m}{a^m} + \frac{y^m}{b^m} = 1$$

(x, y) বিন্দুত $\frac{x^m}{a^m} + \frac{y^m}{b^m} = 1$ বক্রের স্পর্শক আৰু অভিলম্বৰ সমীকৰণ উলিওৱা।

- (ii) If $u = x^2 \tan^{-1} \frac{y}{x} - y^2 \tan^{-1} \frac{x}{y}$, $xy \neq 0$, then prove that

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

যদি $u = x^2 \tan^{-1} \frac{y}{x} - y^2 \tan^{-1} \frac{x}{y}$, $xy \neq 0$,

তেজ্বে প্রমাণ কৰা যে

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

- (e) (i) Examine the continuity of the function f defined by

$$f(x) = 2^{1/x}, \quad x \neq 0$$

$$= 0, \quad x = 0$$

f ফলনটোৰ অবিচ্ছিন্নতা পৰীক্ষা কৰা, য'ত

$$f(x) = 2^{1/x}, \quad x \neq 0$$

$$= 0, \quad x = 0$$

- (ii) Prove that the radius of curvature at the vertex of the parabola $y^2 = 4x$ is $\frac{1}{2}$.

$y^2 = 4x$ পৰাবৃত্তৰ শীৰ্ষবিন্দুত বক্রতা ব্যাসার্ধ $\frac{1}{2}$ বুলি প্রমাণ কৰা।

- (f) (i) If $y = \log(x + \sqrt{1 + x^2})$, then prove by using Leibniz's theorem that

$$(1 + x^2)y_{n+2} + (2n + 1)xy_{n+1} + n^2y_n = 0$$

যদি $y = \log(x + \sqrt{1 + x^2})$, তেন্তে লিৰনিজৰ উপপাদ্যৰ ব্যৱহাৰ কৰি প্রমাণ কৰা যে

$$(1 + x^2)y_{n+2} + (2n + 1)xy_{n+1} + n^2y_n = 0$$

- (ii) Evaluate :

মান উলিওৱা :

$$\int_0^{\pi/4} \sec^3 x \, dx$$

- (g) (i) Prove that

$$\int_0^{2a} f(x) \, dx = 2 \int_0^a f(x) \, dx,$$

$$\text{if } f(2a - x) = f(x)$$

and

$$\int_0^{2a} f(x) \, dx = 0, \text{ if } f(2a - x) = -f(x)$$

প্রমাণ কৰা যে

$$\int_0^{2a} f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx,$$

$$\text{যদি } f(2a-x) = f(x)$$

আৰু

$$\int_0^{2a} f(x) dx = 0, \text{ যদি } f(2a-x) = -f(x)$$

- (ii) Find the asymptotes parallel to coordinate axis of the curve $(x^2 + y^2)x - ay^2 = 0$.

$(x^2 + y^2)x - ay^2 = 0$ বক্রৰ অক্ষৰ সমান্তৰাল হোৱা অনন্তস্পৰ্শক নিৰ্ণয় কৰা।

- (h) (i) Find the area bounded by the parabola $y^2 = 4ax$ and its latus rectum.

$y^2 = 4ax$ পৰাবৃত্ত আৰু ইয়াৰ নিয়ামিকাই আগুৱা অংশৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা।

- (ii) Solve :

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 3 \frac{dx}{dt} + 2x = 0$$

Given that when $t=0$, then $x=0$ and $\frac{dx}{dt} = 2$.

(11)

সমাধান কবা :

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} + 2x = 0$$

য'ত দিয়া আছে, যেতিয়া $t=0$ তেতিয়া $x=0$

আৰু $\frac{dx}{dt} = 2$ হয়।

★ ★ ★